Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Optimering för ingenjörer
Lösning till tentamen
2017-08-25

Lösningar

Uppgift 1

1a: Kinesiska brevbärarproblemet. Om den ena noden har valens ett, måste man köra fram och tillbaka till den noden, och städa åt ena hållet (spelar ingen roll vilket), så det finns bara ett sätt att åtgärda den bågen. Därför kan man ta bort noden och bågen, och komma ihåg tiden det tog (för att efteråt addera den till totaltiden).

I exemplet elimineras noderna i följande ordning, med körtid inom parentes: 17 (6), 16 (10), 15 (20), 14 (12), 13 (30), 18 (4), 12 (14), 1 (8), 2 (14), 8 (12). Den totala tiden detta tar är 130.

1b: I den återstående grafen har nod 6 och 7 udda valens och billigaste sättet att höja dessa valenser är bågen (6,7). Vi dubblerar alltså den, och får t.ex. följande tur: 3-4-6-5-3-7-6-7-9-11-10-3, med kostnad 50. Tur inklusive reducerade bitar: 3-4-6-5-3-7-6-7-8-7-9-11-12-18-12-13-14-13-15-16-15-17-15-13-12-11-10-3-2-1-2-3. Totalt avstånd: $130 + 50 = 180$.

1c: För det första har alla bågar som reducerats bort redan körts på två gånger. I resten av grafen dubbleras alla bågar, vilket direkt ger jämn valens för alla noder, så inga mer bågar behöver läggas till. Kostnaden för den reducerade delen blir därför oförändrad. I den återstående grafen finns en lösning med kostnad precis två gånger summan av bågkostnaderna, $2 * 45 = 90$, så den totala kostnaden (avståndet) blir $90 + 130 = 220$, vilket är betydligt mindre än $2 * 180 = 360$. Även om man bara betraktar den ej reducerade delen blir kostnaden, 90, mindre än $2 * 50 = 100$.

Uppgift 2

Använd Dijkstras metod. Billigaste väg-sökning från nod 16 till nod 5 ger bl.a. följande nodpriser: $y^1_{12} = 30$, $y^1_{11} = 37$, $y^1_{10} = 40$, $y^1_9 = 40$. Billigaste väg-sökning från nod 5 till nod 16 med kostnad $3c$ ger bl.a. följande nodpriser: $y^2_9 = 42$, $y^2_{10} = 24$, $y^2_{11} = 33$, $y^2_{12} = 54$. Max av dessa två nodpriser ger första tidpunkt där båda kan vara där: $y_9 = 42$, $y_{10} = 40$, $y_{11} = 37$, $y_{12} = 54$. Vi ser nu att nod 11 har det lägsta nodpriset, så de bör träffas där.

Uppgift 3

Handelsresandeproblem. Närmaste granne-heuristiken ger turen: 1-7-8-5-4-3-6-2-1, med kostnad 35. Billigaste 1-träd ger kostnad 33, så vi får övre gräns 35 och undre gräns 33.

Uppgift 4

4a: Inför slackvariabler x_4, x_5, x_6 och x_7. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	-5	-6	-2	0	0	0	0	0
x_4	0	2	2	1	1	0	0	0	10
x_5	0	1	1	1	0	1	0	0	8
x_6	0	1	0	0	0	0	1	0	4
x_7	0	0	1	0	0	0	0	1	3

Först blir x_2 inkommande och x_7 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	-5	0	-2	0	0	0	6	18
x_4	0	2	0	1	1	0	0	-2	4
x_5	0	1	0	1	0	1	0	-1	5
x_6	0	1	0	0	0	0	1	0	4
x_2	0	0	1	0	0	0	0	1	3

Sedan blir x_1 inkommande och x_4 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	0	0	1/2	5/2	0	0	1	28
x_1	0	1	0	1/2	1/2	0	0	-1	2
x_5	0	0	0	1/2	-1/2	1	0	0	3
x_6	0	0	0	-1/2	-1/2	0	1	1	2
x_2	0	0	1	0	0	0	0	1	3

Denna tablå är optimal, så optimallösningen blir $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $x_3 = 0$, ($x_4 = 0$, $x_5 = 3$, $x_6 = 2$, $x_7 = 0$) med $z = 28$. Svar i ord: Göte ska ta med 2 kg brända mandlar och 3 kg marsipangodis, vilket ger vinst 28. Det första och fjärde bivillkoret är aktivt, eftersom slackvariablerna är noll.

4b: Skuggpriser utlästa från optimaltablån i uppgift a: $y_1 = 2.5$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$, $y_4 = 1$. Detta säger att ökning av högerled 1 ger vinstökning med 2.5 per enhet, och ökning av högerled 4 ger vinstökning med 1 per enhet, medan ökningar av högerled 2 och 3 inte ger någon effekt.

4c: Ny variabel x_8: reducerad kostnad $\hat{c}_8 = c_8 - a_8^T y = 4 - (2y_1 + 2y_2) = 4 - 5 = -1 < 0$, så spunnet socker skulle inte ge någon förbättring.

Uppgift 5

Skriv problemet på standardform.
$g_1(x) = x_1 - 2 \leq 0$, $g_2(x) = x_2 - 2 \leq 0$, $g_3(x) = -x_1 \leq 0$, $g_4(x) = -x_2 \leq 0$,
$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 - 5x_2 - 4 \\ 8x_2 - 5x_1 - 3 \end{pmatrix}$. $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_4(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. (Hessianen av $f(x)$ är positivt definit, och bivillkoren är linjära, så problemet är konvext.)

5a: För punkt (0, 0):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 1 och 2 är inte aktiva, så $u_1 = 0$ och $u_2 = 0$.

KKT3: $\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Detta ger $u_3 = -4 < 0$ och $u_4 = -3 < 0$, så KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

För punkt (2, 0):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 2 och 3 är inte aktiva, så $u_2 = 0$ och $u_3 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} 4 \\ -13 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Detta ger $u_1 = -4 < 0$ och $u_4 = -13 < 0$, så KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

För punkt (0, 2):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 1 och 4 är inte aktiva, så $u_1 = 0$ och $u_4 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -14 \\ 13 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Detta ger $u_2 = -13 < 0$ och $u_3 = -14 < 0$, så KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

För punkt (2, 2):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 3 och 4 är inte aktiva, så $u_3 = 0$ och $u_4 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -6 \\ 3 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Detta ger $u_1 = 6 > 0$ och $u_2 = -3 < 0$, så KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

5b: I startpunkten är bivillkor 3 och 4 aktiva. Första LP-problemet blir

$$\min z = -4d_1 - 3d_2 \text{ då } d_1 \geq 0,\ d_2 \geq 0, \text{ samt } -1 \leq d \leq 1,$$

vilket har optimallösning $d = (1, 1)$ med $z = -7$. Sätt $x^{(2)} = (t, t)$. Maximal steglängd blir 2 pga. bivillkor 1 och 2. Linjesökning skulle ge $t = 3.5$, så vi får $t = t^{max} = 2$ och $x^{(2)} = (2, 2)$.

Nu är bivillkor 1 och 2 aktiva. LP-problemet blir

$$\min z = -6d_1 + 3d_2 \text{ då } d_1 \leq 0,\ d_2 \leq 0, \text{ samt } -1 \leq d \leq 1,$$

vilket har optimallösning $d = (0, -1)$ med $z = -3$. Sätt $x^{(3)} = (2, 2 - t)$. Maximal steglängd blir 2 pga. bivillkor 4. Linjesökning ger $t = 3/8 = 0.375$, så vi får $x^{(3)} = (2, 13/8) = (2, 1.625)$.

Nu är bivillkor 1 aktivt. LP-problemet blir

$$\min z = -4.125d_1 \text{ då } d_1 \leq 0 \text{ samt } -1 \leq d \leq 1,$$

vilket t.ex. har optimallösning $d = (0, 0)$ med $z = 0$. Alltså är $x = (2, 1.625)$ optimal.
Svar: Blanda i 2 enheter Habanero och 1.625 enheter Piri-piri.

Uppgift 6

6a: Den givna startlösningen är tillåten och ger basbågarna (1,4), (7,4), (6,7), (2,6), samt t.ex. (2,5) och (6,3). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 3$, $y_3 = 8$, $y_4 = 10$, $y_5 = 6$, $y_6 = 5$, $y_7 = 8$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{15} = -3 < 0$ (ej optimalt, öka), $\hat{c}_{17} = -6 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{34} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{56} = 3 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Vi får x_{15} som inkommande variabel, att öka. Cykeln blir 1-5-2-6-7-4-1, och maximal ändring blir noll p.g.a. båge (2,5). Alltså blir båge (2,5) utgående.

Nu får vi nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 3$, $y_3 = 8$, $y_4 = 10$, $y_5 = 3$, $y_6 = 5$, $y_7 = 8$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{25} = 3 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{17} = -6 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{34} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{56} = 0$ (optimalt). Alla bågar uppfyller optimalitetskriterierna, och vi har inte ändrat flödet, så lösningen var optimal.

6b: Nu blir $\hat{c}_{17} = 12 > 0$, vilket inte är optimalt. Vi vill minska x_{17}, som blir inkommande variabel. Cykeln blir 7-1-4-7, och den största ändring som kan göras är 3 p.g.a. båge (1,7), så x_{17} blir utgående variabel direkt.

Vi får nu samma nodpriser och reducerade kostnader som förut, så nu uppfyller alla bågar optimalitetskriterierna, och lösningen är optimal.

6c: $\hat{c}_{17} = c_{17} + y_1 - y_7 = c_{17} - 8 > 0$ om $c_{17} > 8$.

Uppgift 7

P0: Grafisk lösning ger $x_1 = 5.75$, $x_2 = 2.75$ och $z = 31.25$, vilket ger $\bar{z} = 31$.
Förgrena över x_1: P1 = P0 + ($x_1 \leq 5$), P2 = P0 + ($x_1 \geq 6$).
P1: Grafisk lösning: $x_1 = 5$, $x_2 = 3.5$, $z = 30.5$, vilket ger $\bar{z} = 30$.
Förgrena över x_2: P3 = P1 + ($x_2 \leq 3$), P4 = P1 + ($x_2 \geq 4$).
P3: Grafisk lösning: $x_1 = 5$, $x_2 = 3$, $z = 29$, vilket ger $\underline{z} = 29$. Spara lösningen och kapa grenen.
P4: Grafisk lösning: $x_1 = 4.5$, $x_2 = 4$, $z = 30$, vilket ger $\bar{z} = 30$.
Förgrena över x_1: P5 = P4 + ($x_1 \leq 4$), P6 = P4 + ($x_1 \geq 5$).
P5: Grafisk lösning: $x_1 = 4$, $x_2 = 4.5$, $z = 29.5$, vilket ger $\bar{z} = 29$.
Kapa, ty kan ej ge bättre än $z = 29$.
P6: Saknar tillåten lösning. Kapa.
P2: Grafisk lösning: $x_1 = 6$, $x_2 = 2$, $z = 30$, vilket ger $\underline{z} = 30$. Spara lösningen och kapa grenen.

Trädet avsökt. Bästa lösning $x_1 = 6$, $x_2 = 2$, med $z = 30$.
Svar i ord: Välj 6 stånd med ätbara varor och 2 andra till torget.

Uppgift 8

8a: Sök maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 8-1-4, med kapacitet 9. Skicka 9 enheter och ändra tillåtna riktningar. Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 8-2-6-3-4, med kapacitet 7. Skicka 7 enheter och ändra tillåtna riktningar. Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 8-2-5-6-9-7-4, med kapacitet 2. Skicka 2 enheter och ändra tillåtna riktningar. I nästa iteration kan man i Dijkstras metod märka/nå noderna 8, 1, 2, 5, 6, 9, men inte 3, 4, 7, så minsnittet går mellan dessa noder, över bågarna (1,4), (1,7), (9,7), (6,7) och (6,3). Maxflödet är 18.

8b: Båge (9,2) ingår i minsnittet, vilket gör att minskat flöde i den inte kan kompenseras genom ökat flöde i någon annan båge. Svar: Nej.

Uppgift 9

9a: Efter första steget fås $\alpha = (6, 4, 5, 7, 6)$ och $\beta = (0, 3, 2, 0, 0)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 3 och 4 samt kolumn 4 och 5, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (7, 5, 5, 7, 7)$ och $\beta = (0, 3, 2, -1, -1)$. Nu fås lösningen $x_{13} = 1$, $x_{25} = 1$, $x_{32} = 1$, $x_{41} = 1$, $x_{54} = 1$, och total kostnad blir 34.

Optimal duallösning är $\alpha = (7, 5, 5, 7, 7)$ och $\beta = (0, 3, 2, -1, -1)$. Summering av duallösningen ger 34, så starka dualsatsen är uppfylld.

9b: Reducerad kostnad för position (2,1) är $\hat{c}_{21} = c_{21} - \alpha_2 - \beta_1$, vilket för optimal duallösning blir $\hat{c}_{21} = c_{21} - 5$, så för att få $\hat{c}_{21} < 0$ krävs $c_{21} < 5$, dvs. person 1 måste sänka sin kostnad med mer än 8 för att få passet. (Detta kan också ses genom att $\hat{c}_{21} = 8$ i optimala matrisen.)