Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Optimering för ingenjörer
Lösning till tentamen
2017-10-19

Lösningar

Uppgift 1

1a: Handelsresandeproblem. Om man finner billigaste 1-träd, och byter båge (3,5) mot (3,4) fås en bra tur: 1-2-3-4-6-5-7-8-1, med kostnad 42. Billigaste 1-träd ger kostnad 40, så vi får övre gräns 42 och undre gräns 40.

1b: Nodövertäckningsproblemet. Heuristik: ta med noden med högst valens av ej täckta bågar. Plockar noderna i ordningen 5, 2, 6, 8, 3.

1c: Kinesiska brevbärarproblemet. Nod 4 och 5 har udda valens, och billigaste sättet att höja dessa valenser är bågen (4,5). Vi dubblerar alltså den, och får t.ex. följande tur: 1-2-3-4-6-7-5-6-3-5-4-5-2-7-8-1, med kostnad 91.

Uppgift 2

2a: Använd Dijkstras metod. Billigaste väg-sökning från nod 1 till nod 4 ger vägen 1-5-9-4 och bl.a. följande nodpriser: $y_5^1 = 3$, $y_6^1 = 9$, $y_9^1 = 7$, $y_8^1 = 12$, $y_4^1 = 15$. Billigaste väg-sökning från nod 2 till nod 4 ger vägen 2-9-4 och bl.a. följande nodpriser: $y_5^2 = 4$, $y_9^2 = 6$, $y_6^2 = 10$, $y_4^2 = 14$. Billigaste väg-sökning från nod 3 till nod 4 ger vägen 3-8-4 och bl.a. följande nodpriser: $y_7^3 = 8$, $y_8^3 = 8$, $y_9^3 = 13$, $y_4^2 = 16$. Max av dessa tre nodpriser ger första tidpunkt där alla kan vara i nod 4: 16.

Ett lite smartare alternativ kan vara att köra en billigaste väg-sökning från nod 4 bakåt, och använda alla bågar baklänges. Man får då nodpriserna $y_1 = 15$, $y_2 = 14$, $y_3 = 16$, $y_4 = 0$, $y_5 = 12$, $y_6 = 8$, $y_7 = 13$, $y_8 = 8$, $y_9 = 8$, och kan direkt dra ovanstående slutsatser.

2b: I nod 9 kan Marry och Ronny träffas efter tiden 7. Efter tiden 13 kan Hermelinione också vara där (om hon väljer den vägen).

2c: $y_1 = 0$, $y_2 = 7$, $y_3 = 25$, $y_4 = 15$, $y_5 = 3$, $y_6 = 9$, $y_7 = 17$, $y_8 = 12$, $y_9 = 7$.

Uppgift 3

3a: Den givna startlösningen är tillåten och ger basbågarna (1,3), (2,3), (2,7), (3,4), (3,6) och (6,5). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = -3$, $y_3 = 5$, $y_4 = 12$, $y_5 = 13$, $y_6 = 8$, $y_7 = 3$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{12} = 9 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{37} = 8 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{45} = 6 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{64} = 3 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{75} = -3 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{76} = 0$ (optimalt). Alla bågar uppfyller optimalitetsvillkoren, så lösningen är optimal.

3b: Nu fås $\hat{c}_{75} = 10 > 0$, vilket inte är optimalt, ty $x = u$, Välj x_{75} som inkommande variabel, att minska. Cykeln blir 5-7-2-3-6-5, och maximal ändring blir 3 p.g.a. båge (7,5) (eller (2,7)). Välj båge (7,5) som utgående. Nu får vi nodpriserna samma basträd, samma nodpriser och samma reducerade kostnader. Skillnaden är att $\hat{c}_{75} = 10 > 0$ nu är optimalt, ty $x = 0$.

3c: $\hat{c}_{75} = c_{75} + y_7 - y_5 = c_{75} - 10 > 0$ om $c_{75} > 10$.

3d: Sök maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 1-3-6-5, med kapacitet 5. Skicka 5 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (1,3) blir full.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 1-2-7-6-4-5, med kapacitet 4. Skicka 4 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Bågarna (1,2), (7,6), (6,4) och (4,5) blir fulla.) I nästa iteration kan man i Dijkstras metod märka/nå nod 1, men inga andra, så minsnittet går mellan nod 1 och de andra, dvs. över bågarna (1,2), (1,3). Maxflödet är 9.

Uppgift 4

Skriv problemet på standardform.
$g_1(x) = x_1 + x_2 - 2 \leq 0$, $g_2(x) = x_1 - 1 \leq 0$, $g_3(x) = -x_1 \leq 0$, $g_4(x) = -x_2 \leq 0$,
$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_2 - 6 \\ 10x_2 - 2x_1 - 8 \end{pmatrix}$, $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$,
$\nabla g_4(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. (Hessianen av $f(x)$ är positivt definit, och bivillkoren är linjära, så problemet är konvext.)

4a: I startpunkten är bivillkor 3 och 4 aktiva. Första LP-problemet blir

$$\min z = -6d_1 - 8d_2 \text{ då } d_1 \geq 0,\ d_2 \geq 0, \text{ samt } -1 \leq d \leq 1,$$

vilket har optimallösning $d = (1, 1)$ med $z = -14$. Sätt $x^{(2)} = (t, t)$. Maximal steglängd blir 1 pga. bivillkor 1 och 2. Linjesökning skulle ge $t = 1.75$, så vi får $t = t^{max} = 1$ och $x^{(2)} = (1, 1)$.

Nu är bivillkor 1 och 2 aktiva. LP-problemet blir

$$\min z = -6d_1 \text{ då } d_1 + d_2 \leq 0,\ d_1 \leq 0, \text{ samt } -1 \leq d \leq 1,$$

vilket har optimallösning $d = (0, 0)$ med $z = 0$. Alltså är $x = (1, 1)$ optimal.
Svar: Blanda en enhet av drakspott och en enhet av myrsyra.

4b: För punkt (0, 0):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 1 och 2 är inte aktiva, så $u_1 = 0$ och $u_2 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -6 \\ -8 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Detta ger $u_3 = -6 < 0$ och $u_4 = -8 < 0$, så KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

För punkt (1, 1):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 3 och 4 är inte aktiva, så $u_3 = 0$ och $u_4 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Detta ger $u_1 = 0$ och $u_2 = 6 > 0$, så KKT4 är uppfyllt. Punkten är en KKT-punkt, och optimal, eftersom problemet är konvext.

Uppgift 5

P0: Grafisk lösning ger $x_1 = 2$, $x_2 = 1.6$ och $z = 22$, vilket ger $\bar{z} = 22$.

Förgrena över x_2: P1 = P0 + ($x_2 \leq 1$), P2 = P0 + ($x_2 \geq 2$).
P1: Grafisk lösning: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $z = 19$, heltalig lösning, vilket ger $\underline{z} = 19$. Spara lösningen och kapa grenen.
P2: Grafisk lösning: $x_1 = 1.67$, $x_2 = 2$, $z = 21.67$, vilket ger $\bar{z} = 21$.
Förgrena över x_1: P3 = P2 + ($x_1 \leq 1$), P4 = P2 + ($x_1 \geq 2$).
P3: Grafisk lösning: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $z = 17$. Kapa, ty kan ej ge bättre än $z = 19$.
P4: Saknar tillåten lösning. Kapa.

Trädet avsökt. Bästa lösning $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, med $z = 19$.
Svar i ord: Välj 2 ägg från norsk blårygg och ett från finsk perkiles.

Uppgift 6

6a: Efter första steget fås $\alpha = (-12, -11, -9, -7, -6)$ och $\beta = (0, 1, 1, 0, 0)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 3, 4 och 5 samt kolumn 5, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (-11, -10, -9, -7, -6)$ och $\beta = (0, 1, 1, 0, -1)$. Nu fås lösningen $x_{14} = 1$, $x_{25} = 1$, $x_{32} = 1$, $x_{41} = 1$, $x_{53} = 1$, och total kostnad blir -42.

Optimal duallösning är $\alpha = (-11, -10, -9, -7, -6)$ och $\beta = (0, 1, 1, 0, -1)$. Summering av duallösningen ger -42, så starka dualsatsen är uppfylld.

6b: Reducerad kostnad för position (4,4) är $\hat{c}_{44} = c_{44} - \alpha_4 - \beta_4$, vilket för optimal duallösning blir $\hat{c}_{44} = c_{44} + 7$, så för att få $\hat{c}_{44} < 0$ krävs $c_{44} < -7$, dvs. Ronny måste öka sina poäng med mer än 2. (Detta kan också ses genom att $\hat{c}_{44} = 2$ i optimala matrisen.)

Uppgift 7

7a: Inför slackvariabler x_4, x_5, x_6 och x_7. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	-4	-2	-3	0	0	0	0	0
x_4	0	1	1	1	1	0	0	0	200
x_5	0	1	0	0	0	1	0	0	100
x_6	0	0	1	-1	0	0	1	0	0
x_7	0	1	2	2	0	0	0	1	150

Först blir x_1 inkommande och x_5 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	0	-2	-3	0	4	0	0	400
x_4	0	0	1	1	1	-1	0	0	100
x_1	0	1	0	0	0	1	0	0	100
x_6	0	0	1	-1	0	0	1	0	0
x_7	0	0	2	2	0	-1	0	1	50

Sedan blir x_3 inkommande och x_7 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	0	1	0	0	5/2	0	3/2	475
x_4	0	0	0	0	1	-1/2	0	-1/2	75
x_1	0	1	0	0	0	1	0	0	100
x_6	0	0	2	0	0	-1/2	1	1/2	25
x_3	0	0	1	1	0	-1/2	0	1/2	25

Denna tablå är optimal, så optimallösningen blir $x_1 = 100$, $x_2 = 0$, $x_3 = 25$, ($x_4 = 75$, $x_5 = 0$, $x_6 = 26$, $x_7 = 0$) med $z = 475$. Svar i ord: Gör trollstaven av 100 gram fläder och 25 gram päron, vilket ger magisk styrka 475.

De andra och fjärde bivillkoren är aktiva, eftersom slackvariablerna är noll, medan de första och tredje bivillkoren inte är aktiva. I ord, staven väger mindre än 200 gram, vi använder maximal mängd fläder, relationen mellan päron och kastanj är inte begränsande och densitetsvillkoret är aktivt.

7b: Skuggpriser utlästa från optimaltablån i uppgift a: $y_1 = 0$, $y_2 = 2.5$, $y_3 = 0$, $y_4 = 1.5$. Detta säger att ökning av stavens maxvikt (bivillkor 1) inte ger någon förbättring, medan en ökning av tillåten mängd flädert rä (bivillkor 2) skulle ge en förbättring av 2.5 per enhet.

7c: Ny variabel x_8: reducerad kostnad $\hat{c}_8 = c_8 - a_8^T y = 3 - (2y_1 + y_4) = 3 - 1.5 = 1.5 > 0$, så lönnträ verkar bra att ta med.