Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Optimering för ingenjörer
Lösning till tentamen
2018-01-02

Lösningar

Uppgift 1

1a: Den givna startlösningen är tillåten och ger basbågarna (2,4), (3,5) och (4,5) samt några bågar som får med nod 1 och 6 i trädet. Jag väljer (1,4) och (1,6). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 10$, $y_4 = 6$, $y_5 = 15$, $y_6 = 6$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{12} = 3 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{23} = 4 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{43} = -2 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{46} = 10 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{65} = -1 < 0$ (optimalt ty $x = u$). Alla bågar uppfyller optimalitetsvillkoren, så lösningen är optimal. (Om man väljer andra basbågar kan man få göra någon iteration med basbyte, men ändringen noll i flödet.)

1b: Nu fås $\hat{c}_{43} = 1 > 0$, vilket inte är optimalt, ty $x = u$. Välj x_{43} som inkommande variabel, att minska. Cykeln blir 3-4-5-3, och maximal ändring blir 1 p.g.a. båge (4,5) (eller (3,5)). Välj båge (4,5) som utgående. Nu får vi nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 11$, $y_4 = 6$, $y_5 = 16$, $y_6 = 6$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{12} = 3 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{23} = 3 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{45} = -1 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{46} = 10 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{65} = -2 < 0$ (optimalt ty $x = u$). Alla bågar uppfyller optimalitetsvillkoren, så lösningen är optimal.

1c: $\hat{c}_{23} = c_{23} + y_2 - y_3 = c_{23} - 10 < 0$ om $c_{23} < 10$. Minska med 4 eller mer.

Uppgift 2

Handelsresandeproblem. Modifiering av billigate 1-träd ger turen 1-2-4-3-5-6-1, med kostnaden 43. Billigaste 1-träd ger kostnad 39, så vi får övre gräns 43 och undre gräns 39.

Uppgift 3

Efter första steget fås $\alpha = (-8, -8, -9, -7, -6)$ och $\beta = (0, 1, 1, 0, 1)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 3 och 5 samt kolumn 1 och 4, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (-7, -7, -9, -6, -6)$ och $\beta = (-1, 1, 1, -1, 1)$. Nu kan man stryka alla nollor genom att stryka rad 2, 3 och 5 samt kolumn 1, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (-6, -7, -9, -5, -6)$ och $\beta = (-2, 1, 1, -1, 1)$. Nu fås lösningen $x_{11} = 1$, $x_{24} = 1$, $x_{32} = 1$, $x_{43} = 1$, $x_{55} = 1$, och total kostnad blir -33 (totalt värde 33).

Optimal duallösning är $\alpha = (-6, -7, -9, -5, -6)$ och $\beta = (-2, 1, 1, -1, 1)$. Summering av duallösningen ger -33, så starka dualsatsen är uppfylld.

Uppgift 4

P0: Grafisk lösning ger $x_1 = 2.5$, $x_2 = 0$ och $z = 10$, vilket ger $\bar{z} = 10$ (eller $x_1 = 0$, $x_2 = 3.333$ och $z = 10$, vilket ger en annan lösningsgång).

Förgrena över x_1: P1 = P0 + ($x_1 \leq 2$), P2 = P0 + ($x_1 \geq 3$).
P1: Grafisk lösning: $x_1 = 2$, $x_2 = 0.667$, $z = 10$. (Ingen förbättring av $\bar{z}$.)
Förgrena över x_2: P3 = P2 + ($x_2 \leq 0$), P4 = P2 + ($x_2 \geq 1$).
P3: Grafisk lösning: $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $z = 8$, heltalig lösning, vilket ger $\underline{z} = 8$.
P4: Grafisk lösning: $x_1 = 1.75$, $x_2 = 1$, $z = 10$. (Ingen förbättring av $\bar{z}$.)
Förgrena över x_1: P5 = P4 + ($x_1 \leq 1$), P6 = P4 + ($x_1 \geq 2$).
P5: Grafisk lösning: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $z = 10$, heltalig lösning, vilket ger $\underline{z} = 10$.
Eftersom $\underline{z} = \bar{z}$ kan P6 kapas.
Detsamma gäller för P2.

Trädet avsökt. Bästa lösning $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, med $z = 10$.
Svar i ord: Köp en kamera av typ 1 och två av typ 2, vilket ger nyttan 10.
(Målfunktionen är parallell med bivillkoret, vilket gör problemet mer svårlöst.)

Uppgift 5

5a: Använd Dijkstras metod. Billigaste väg-sökning från nod 1 till nod 7 ger vägen 1-2-5-7 med kostnad 27.

5b: Nysta upp från nod 6 istället: Väg: 1-3-6, kostnad 18.

2c: $y_4 = 13$, $y_7 = 27$, så c_{47} behöver vara mindre än $y_7 - y_4 = 14$.

Uppgift 6

Skriv problemet på standardform.
$g_1(x) = x_1 + x_2 - 1.5 \leq 0$, $g_2(x) = -x_1 + x_2 \leq 0$, $g_3(x) = x_1 - 1 \leq 0$, $g_4(x) = x_2 - 1 \leq 0$, $g_5(x) = -x_1 \leq 0$, $g_6(x) = -x_2 \leq 0$,
$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 - 5x_2 - 8 \\ 8x_2 - 5x_1 - 2 \end{pmatrix}$, $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_4(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_5(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_6(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. (Hessianen av $f(x)$ är positivt definit, och bivillkoren är linjära, så problemet är konvext.)

6a: I startpunkten är bivillkor 2, 5 och 6 aktiva. Första LP-problemet blir
$$\min z = -8d_1 - 2d_2 \text{ då } d_1 \geq d_2,\ d_1 \geq 0,\ d_2 \geq 0, \text{ samt } -1 \leq d \leq 1,$$
vilket har optimallösning $d = (1, 1)$ med $z = -14$. Sätt $x^{(2)} = (t, t)$. Maximal steglängd blir 0.75 pga. bivillkor 1. Ledningen ger $t = t^{max} = 0.75$ och $x^{(2)} = (0.75, 0.75)$.

Nu är bivillkor 1 och 2 aktiva. LP-problemet blir
$$\min z = -8.75d_1 + 0.25d_2 \text{ då } d_1 + d_2 \leq 0,\ d_1 \geq d_2, \text{ samt } -1 \leq d \leq 1,$$
vilket har optimallösning $d = (1, -1)$ med $z = -9$. Sätt $x^{(3)} = (0.75 + t, 0.75 - t)$. Maximal steglängd blir 0.25 pga. bivillkor 3. Ledningen ger $t = t^{max} = 0.25$ och $x^{(2)} = (1, 0.5)$.

Nu är bivillkor 1 och 3 aktiva. LP-problemet blir
$$\min z = -6.5d_1 - 3d_2 \text{ då } d_1 + d_2 \leq 0,\ d_1 \leq 0, \text{ samt } -1 \leq d \leq 1,$$
vilket har optimallösning $d = (0, 0)$ med $z = 0$. Alltså är $x = (1, 0.5)$ optimal.
Svar: Blanda en enhet rött med en halv enhet gult.

6b: För punkt (0, 0):
KKT1: Punkten är tillåten.

KKT2: Bivillkor 1, 3 och 4 är inte aktiva, så $u_1 = 0$, $u_3 = 0$ och $u_4 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_5 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_6 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Detta ger $-u_2 - u_5 = 8$ och $u_2 - u_6 = 2$, vilket t.ex. ger $u_5 = -8 - u_2$ och $u_6 = -2 + u_2$, så $u_5 \geq 0$ ger $u_2 \leq -8$, vilket visar att KKT4 inte kan vara uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

För punkt (1, 0):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 1, 2, 4 och 5 är inte aktiva, så $u_1 = 0$, $u_2 = 0$, $u_4 = 0$ och $u_5 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -4 \\ -7 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_6 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Detta ger $u_3 = 4$ och $u_6 = -7$, så KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

För punkt (1, 0.5):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 2, 4, 5 och 6 är inte aktiva, så $u_2 = 0$, $u_4 = 0$, $u_5 = 0$ och $u_6 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -6.5 \\ -3 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Detta ger $u_1 = 6.5$ och $u_3 = 3$, så KKT4 är uppfyllt. Punkten är en KKT-punkt.

För punkt (0.75, 0.75):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 3, 4, 5 och 6 är inte aktiva, så $u_3 = 0$, $u_4 = 0$, $u_5 = 0$ och $u_6 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -8.75 \\ 0.25 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Detta ger $u_1 = 16.5$ och $u_2 = -8.75$, så KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

Uppgift 7

7a: LP-dualen blir

$$\begin{array}{llrcrcrcll} \max & v = & 20y_1 & + & 20y_2 & + & 20y_3 & & & \\ \text{då} & & 10y_1 & & & & & \leq & 5 & (1) \\ & & & & 10y_2 & & & \leq & 4 & (2) \\ & & 2y_1 & + & 2y_2 & + & 10y_3 & \leq & 3 & (3) \\ & & y_1, & & y_2, & & y_3 & \geq & 0 & \end{array}$$

Inför slackvariabler y_4, y_5 och y_6. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	v	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	$\hat{b}$
v	1	-20	-20	-20	0	0	0	0
y_4	0	10	0	0	1	0	0	5
y_5	0	0	10	0	0	1	0	4
y_6	0	2	2	10	0	0	1	3

Först fås y_1 som inkommande variabel och y_4 som utgående.

Bas	v	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	$\hat{b}$
v	1	0	-20	-20	2	0	0	10
y_1	0	1	0	0	1/10	0	0	1/2
y_5	0	0	10	0	0	1	0	4
y_6	0	0	2	10	-1/5	0	1	2

Sedan fås y_2 som inkommande och y_5 som utgående.

Bas	v	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	$\hat{b}$
v	1	0	0	-20	2	2	0	18
y_1	0	1	0	0	1/10	0	0	1/2
y_2	0	0	1	0	0	1/10	0	2/5
y_6	0	0	0	10	-1/5	-1/5	1	6/5

Därefter fås y_3 som inkommande och y_6 som utgående.

Bas	v	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	$\hat{b}$
v	1	0	0	0	8/5	8/5	2	102/5
y_1	0	1	0	0	1/10	0	0	1/2
y_2	0	0	1	0	0	1/10	0	2/5
y_3	0	0	0	1	-1/50	-1/50	1/10	6/50

Nu är tablån optimal. Optimallösningen blir $y_1 = 1/2 = 0.5$, $y_2 = 2/5 = 0.4$, $y_3 = 6/50 = 0.12$, med $v = 102/5 = 20.4$. Alla duala bivillkor är aktiva.

Primallösningen läses av i målfunktionsraden under slackvariablerna. $x_1 = 8/5 = 1.6$, $x_2 = 8/5 = 1.6$, $x_3 = 2$, $z = 102/5 = 20.4$.

Svar i ord: Anlita 1.6 tecknare, 1.6 snickare och 2 målare, vilket ger kostnaden 20.4.

7b: Ny variabel x_4: reducerad kostnad $\hat{c}_4 = c_4 - a_4^T y = 4 - (4y_1 + 4y_2 + 4y_3) = 4 - 2 - 1.6 - 0.48 = 4 - 4.08 = -0.08 < 0$, så en sådan person skulle sänka kostnaden lite. (Här spelar det ingen roll hur vi fick fram lösningen i uppgift a.)

Uppgift 8

8a: Kinesiska brevbärarproblemet. Nod 2 och 5 har udda valens. De förbinds billigast med bågarna (2,4) och (4,5), så dessa bågar dubbleras. En rundtur blir då t.ex. 2-3-6-5-3-4-5-4-1-2-4-2, med kostnaden $72 + 15 = 87$.

8b: Optimallösningen förändras ej, ty optimeringen handlar bara om andra gången man går i en båge, och alla sådana kostnader divideras med tre. Totaltiden blir dock $72 + 15/3 = 77$.

8c: Den optimala rundturen är inte unik. En lika bra tur som startar i nod 2 är 2-4-3-2-1-4-5-6-3-5-4-2, där båge (3,4) tas så tidigt som möjligt, Om man får starta i valfri nod kan man givtvis börja med den önskade bågen, t.ex. med turen 4-3-2-1-4-5-6-3-5-4-2-4.

Uppgift 9

Finn maxflöde från nod 7 till nod 1. Minsnittet ger då det snitt mellan nod 7 och 1 som har minimal"kapacitet", dvs. kräver minsta antal stenlejon.

Lösningsgång: Sök maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 7-3-1, med kapacitet 8. Skicka 8 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (3,1) blir full.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får nu vägen 7-6-1, med kapacitet 7. Skicka 7 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (6,1) blir full.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får nu vägen 7-2-1, med kapacitet 6. Skicka 6 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (2,1) blir full.)

Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 7-3-4-1, med kapacitet 2. Skicka 2 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (7,3) blir full.) I nästa iteration kan man i Dijkstras metod märka/nå nod 7, 2 och 6, men inga andra, så minsnittet går mellan dessa noder och de andra, dvs. över bågarna (2,1), (7,3) och (6,1). Placera alltså stenlejon där. Det går åt 23 stenlejon.