Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Optimering för ingenjörer
Lösning till tentamen
2018-05-30

Lösningar

Uppgift 1

1a: P0: Grafisk lösning ger $x_1 = 20/7 = 2\ 6/7$, $x_2 = 40/7 = 5\ 5/7$ och $z = 60/7 = 8\ 4/7$, vilket ger $\bar{z} = 8$.
Förgrena över x_1: P1 = P0 + $(x_1 \leq 2)$, P2 = P0 + $(x_1 \geq 3)$.
P1: Grafisk lösning: $x_1 = 2$, $x_2 = 4$, $z = 6$, heltalig lösning, vilket ger $\underline{z} = 6$. Kapa grenen.
P2: Grafisk lösning: $x_1 = 3$, $x_2 = 5.5$, $z = 8.5$, vilket ger $\bar{z} = 8$ (dvs. ingen förbättring av $\bar{z}$.)
Förgrena över x_2: P3 = P2 + $(x_2 \leq 5)$, P4 = P2 + $(x_2 \geq 6)$.
P3: Grafisk lösning: $x_1 = 10/3 = 3\ 1/3$, $x_2 = 5$, $z = 25/3 = 8\ 1/3$, vilket ger $\bar{z} = 8$ (dvs. ingen förbättring av $\bar{z}$.)
Förgrena över x_1: P5 = P2 + $(x_1 \leq 3)$, P6 = P2 + $(x_1 \geq 4)$.
P5: Grafisk lösning: $x_1 = 3$, $x_2 = 5$, $z = 8$, heltalig lösning, vilket ger $\underline{z} = 8$.
P6: Kapa, ty $\bar{z} = 8$ från P2 via P3, och $\underline{z} = 8$.
P4: Kapa, ty $\bar{z} = 8$ från P2, och $\underline{z} = 8$.

Trädet avsökt. Bästa lösning $x_1 = 3$, $x_2 = 5$, med $z = 8$.
Svar i ord: Ta med tre kalsonger och fem par strumpor.

1b: Tillför bivillkoret $x_1 = x_2$, och lös om. P0 ger direkt $x_1 = 4$, $x_2 = 4$ och $z = 8$. Detta är en heltalig lösning, grenen kapas, och lösningen är alltså bevisat optimal. (Lösningen blev inte sämre.)

Uppgift 2

2a: Kinesiska brevbärarproblemet. Noderna 4, 5, 6 och 8 har udda valens. De förbinds billigast med bågarna (4,8) och (5,6), så dessa bågar dubbleras. En rundtur blir då t.ex. 1-2-3-5-4-8-4-6-5-6-7-5-2-7-1, med kostnaden $53 + 7 = 60$.

2b: Optimallösningen förändras ej, ty optimeringen handlar bara om andra gången man går i en båge, och alla sådana kostnader divideras med tre. Totaltiden blir dock $53 + 7/3 = 55\ 1/3$.

Uppgift 3

3a: Använd Dijkstras metod. Billigaste väg-sökning från nod 1 till nod 7 ger nodpriserna (0, 5, 8, 12, 13, 19, 18), vägen 1-2-4-7 med kostnad 18.

3b: En kostnad för att passera igenom en nod kommer att favorisera vägar med få noder, dvs. kortare vägar (i antal noder och bågar). Problemet kan lösas genom att addera 3 varje gång man anländer till en nod. (Jag räknar inte med extra kostnad i start- och slutnod, men det påverkar ju inte vägen.) Nu fås billigaste vägen 1-3-7 med kostnad 23. (Vägen 1-2-4-7 kostar nu 24.) (Observera att problemet måste lösas om.

Gamla nodmärkningar gäller inte längre.)

3c: Från uppgift a: $y_5 = 13$, $y_7 = 18$, så c_{57} behöver vara mindre än $y_7 - y_5 = 5$ för att snabba upp resan, vilket den är.

Uppgift 4

Handelsresandeproblem. Närmaste-granne ger turen 5-2-1-7-6-4-8-3-5, med kostnaden 35. Billigaste 1-träd ger kostnad 32, så vi får övre gräns 35 och undre gräns 32.

Uppgift 5

Efter första steget fås $\alpha = (-7, -8, -9, -7, -6)$ och $\beta = (0, 2, 0, 0, 1)$. Man kan inte stryka alla nollor med färre än fem streck, så man kan finna en tillåten lösning direkt, nämligen $x_{12} = 1$, $x_{23} = 1$, $x_{34} = 1$, $x_{41} = 1$, $x_{55} = 1$, och total kunskap blir 34 (målfunktionsvärde -34).

Optimal duallösning är ovanstående. Summering av duallösningen ger -34, så starka dualsatsen är uppfylld.

Uppgift 6

6a: Den givna startlösningen är tillåten och ger basbågarna (1,3), (2,4), (2,5), (3,7) och (4,6). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 8$, $y_3 = 8$, $y_4 = 15$, $y_5 = 16$, $y_6 = 19$, $y_7 = 21$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{14} = -8 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{34} = -1 < 0$ (ej optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{45} = 5 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{56} = 3 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{67} = 3 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Välj x_{34} som inkommande variabel, att öka. Cykeln blir 3-4-7-3, och maximal ändring blir 1 p.g.a. båge (4,7) (eller (3,7)). Välj båge (4,7) som utgående. Nu får vi nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 7$, $y_3 = 8$, $y_4 = 14$, $y_5 = 15$, $y_6 = 18$, $y_7 = 21$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{14} = -7 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{45} = 5 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{47} = -1 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{56} = 3 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{67} = 2 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Alla bågar uppfyller optimalitetsvillkoren, så lösningen är optimal.

6b: Ändra sänkstyrka till 3 för nod 5, samt inför en pseudokälla med styrka 1 och gratisbågar till alla sänkor. Den låda som skickas från pseudokällan är den som i verkligheten inte skickas.

Uppgift 7

Skriv problemet på standardform.
$g_1(x) = x_1 + x_2 - 1 \leq 0$, $g_2(x) = x_1 - 2x_2 \leq 0$, $g_3(x) = -2x_1 + x_2 \leq 0$, $g_4(x) = -x_1 \leq 0$, $g_5(x) = -x_2 \leq 0$,
$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 - 4x_2 - 4 \\ 8x_2 - 4x_1 - 2 \end{pmatrix}$, $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$, $\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_4(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_5(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. (Hessianen av $f(x)$ är positivt definit, och bivillkoren är linjära, så problemet är konvext.)

6a: I startpunkten är bivillkor 2, 3, 4 och 5 aktiva. Första LP-problemet blir

$$\min z = -4d_1 - 2d_2 \text{ då } d_1 \leq 2d_2,\ d_2 \leq 2d_1,\ d_1 \geq 0,\ d_2 \geq 0, \text{ samt } -1 \leq d \leq 1,$$

vilket har optimallösning $d = (1, 1)$ med $z = -6$. Sätt $x^{(2)} = (t, t)$. Maximal steglängd blir 0.5 pga. bivillkor 1. Ledningen ger $t = t^{max} = 0.5$ och $x^{(2)} = (0.5, 0.5)$.

Nu är bara bivillkor 1 aktivt. LP-problemet blir

min $z = -4d_1$ då $d_1 + d_2 \leq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$,

vilket har optimallösning $d = (1, -1)$ med $z = -4$. Sätt $x^{(3)} = (0.5{+}t, 0.5{-}t)$. Maximal steglängd blir 1/6 pga. bivillkor 2. Ledningen ger $t = t^{max} = 1/6$ och $x^{(3)} = (2/3, 1/3)$.

Nu är bivillkor 1 och 2 aktiva. LP-problemet blir

min $z = -8/3d_1 - 2d_2$ då $d_1 + d_2 \leq 0$, $d_1 \leq 2d_2$, samt $-1 \leq d \leq 1$,

vilket har optimallösning $d = (0, 0)$ med $z = 0$. Alltså är $x = (2/3, 1/3)$ optimal.
Svar: Blanda två delar av sort 1 med en del av sort 2.

6b: Man kan se grafiskt att extrempunkterna är (0,0), (1/3,2/3) och (2/3,1/3).

För punkt (0, 0):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 1 är inte aktivt, så $u_1 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_5 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Detta ger $u_2 - 2u_3 - u_4 = 4$ och $-2u_2 + u_3 - u_5 = 2$, vilket t.ex. ger $u_4 = -4 + u_2 - 2u_3$ och $u_5 = -2 - 2u_2 + u_3$. Om vi kräver att $u_4 \geq 0$, betyder det att $-4 + u_2 - 2u_3 \geq 0$, dvs. $u_2 \geq 4 + 2u_3$. Detta ger $u_5 = -2 - 2u_2 + u_3 \leq -2 - 2(4 + 2u_3) + u_3 = -10 - 3u_3 < 0$, om $u_3 \geq 0$. Detta visar att det inte finns någon lösning där inget u är negativt, så KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

(Om man använder ledningen i uppgiften, kan man sätta $u_4 = 0$ och $u_5 = 0$, och direkt få $u_2 = -8/3$ och $u_3 = -10/3$.)

För punkt (1/3, 2/3):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 2, 4 och 5 är inte aktiva, så $u_2 = 0$, $u_4 = 0$ och $u_5 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -16/3 \\ 2 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Detta ger $u_1 - 2u_3 = 16/3$ och $u_1 + u_3 = -2$, vilket ger $u_1 = 4/9$ och $u_3 = -22/9$, så KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

För punkt (2/3, 1/3):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 3, 4 och 5 är inte aktiva, så $u_3 = 0$, $u_4 = 0$, $u_5 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -8/3 \\ -2 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Detta ger $u_1 + u_2 = 8/3$ och $u_1 - 2u_2 = 2$, vilket ger $u_1 = 22/9$ och $u_2 = 2/9$, så KKT4 är uppfyllt. Punkten är en KKT-punkt.

Eftersom problemet är konvext, är punkten (2/3, 1/3) optimal.

Uppgift 8

8a: Inför slackvariabler x_5, x_6 och x_7. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	-4	-2	-3	-1	0	0	0	0
x_5	0	1	1	1	1	1	0	0	30
x_6	0	2	3	0	0	0	1	0	12
x_7	0	0	1	2	3	0	0	1	16

Först fås x_1 som inkommande variabel och x_6 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	0	4	-3	-1	0	2	0	24
x_5	0	0	-1/2	1	1	1	-1/2	0	24
x_1	0	1	3/2	0	0	0	1/2	0	6
x_7	0	0	1	2	3	0	0	1	16

Sedadn fås x_3 som inkommande variabel och x_7 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	0	11/2	0	7/2	0	2	3/2	48
x_5	0	0	-1	0	-1/2	1	-1/2	-1/2	16
x_1	0	1	3/2	0	0	0	1/2	0	6
x_3	0	0	1/2	1	3/2	0	0	1/2	8

Nu är tablån optimal. Optimallösningen blir $x_1 = 6$, $x_2 = 0$, $x_3 = 8$, $x_4 = 0$, (samt $x_5 = 16$, $x_6 = 0$, $x_7 = 0$) med $v = 48$. Bivillkor 2 och 3 är aktiva.

Duallösningen läses av i målfunktionsraden under slackvariablerna. $y_1 = 0$, $y_2 = 2$, $y_3 = 3/2$, $v = 48$.

Svar i ord: Det "optimala" halsbandet består av 6 röda och 8 gröna kulor.

8b: De optimala reducerade kostnaderna är $\hat{c}_1 = 0$, $\hat{c}_2 = -11/2 = -5.5$, $\hat{c}_3 = 0$, $\hat{c}_4 = -7/2 = -3.5$. Röda (x_1) och gröna (x_3) kulor är redan med, s de behöver inte ökas. För att blå (x_2) ska komma med måste den vara minst 5.5 vackrare, dvs. ha koefficient 7.5 eller mer. För att gul (x_4) ska komma med måste den vara minst 3.5 vackrare, dvs. ha koefficient 4.5 eller mer.

8c: Ny variabel x_8: reducerad kostnad $\hat{c}_8 = c_8 - a_8^T y = 3 - (y_1 + y_2 + y_3) = 3 - (0 + 2 + 3/2) = 3 - 3.5 = -0.5 < 0$, så svarta kulor skulle inte ge förbättring.

Uppgift 9

Finn maxflöde från nod 1 till nod 6. Minsnittet ger då de bågar mellan nod 1 och 6 som har begränsande kapacitet, och borde byggas ut.

Lösningsgång: Sök maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får t.ex. vägen 1-2-5-6, med kapacitet 2. Skicka 2 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (5,6) blir full.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får nu vägen 1-4-6, med kapacitet 2. Skicka 2 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (4,6) blir full.) I nästa iteration kan man i Dijkstras metod märka/nå nod 1, 2, 3, 4, 5 och 7, men into nod 6, så minsnittet går mellan nod 6 och de andra, dvs. över bågarna (5,6), (4,6) och (6,7) (fel riktning). Uppmaningen är att bygga ut väg (5,6) eller (4,6) eller vända den tillåtna riktningen på väg (6,7).

Uppgift 10

1. Graf 1: Alla hatar alla. Det kan bara finnas en person i varje grupp.
1. Graf 2: Alla gillar alla. Alla är med i samma grupp.
2. Graf 1: Möjliga grupper består av högst tre personer, en ur varje sammanhängande komponent.
2. Graf 2: De tre sammanhängande komponenterna motsvarar tre grupper (som ev. kan slås ihop).
3. Graf 1: Man kan bilda två grupper, där varje grupp består av den ena av de matchade noderna (eller dela upp dem ytterligare).
3. Graf 2: Man kan bilda lika många grupper som matchade bågar, eller slå ihop flera av dem.
4. Graf 1: Ingen ogillar någon. Alla kan vara med i samma grupp (eller dels upp på valfritt sätt).
4. Graf 2: Ingen tycker något. Man kan bilda vilka grupper som helst.
5. Graf 1: Ur den maximala klicken kan bara en person vara med i en grupp. Det bildas alltså minst så många grupper som noder i den maximala klicken.
5. Graf 2: Den maximala klicken är den minsta grupp som kan skapas med dessa personer.
6. Graf 1: Personerna i den oberoende nodmängden har inget emot varandra, och kan bilda grupp.
6. Graf 2: Personerna i den oberoende nodmängden är inte kompisar och behöver inte vara med i samma grupp.