Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

Optimering för ingenjörer
Lösning till tentamen
2018-08-31

Lösningar

Uppgift 1

1a: Inför slackvariabler x_5, x_6 och x_7. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	-2	-3	-1	-4	0	0	0	0
x_5	0	2	6	3	5	1	0	0	30
x_6	0	0	0	1	0	0	1	0	12
x_7	0	0	0	0	1	0	0	1	10

Först fås x_4 som inkommande variabel och x_5 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	-2/5	9/5	7/5	0	4/5	0	0	24
x_4	0	2/5	6/5	3/5	1	1/5	0	0	6
x_6	0	0	0	1	0	0	1	0	12
x_7	0	-2/5	-6/5	-3/5	0	-4/5	0	1	4

Sedan fås x_1 som inkommande variabel och x_4 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	0	3	2	1	1	0	0	30
x_1	0	1	3	3/2	5/2	1/2	0	0	15
x_6	0	0	0	1	0	0	1	0	12
x_7	0	0	0	0	1	0	0	1	10

Nu är tablån optimal. Optimallösningen blir $x_1 = 15$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, (samt $x_5 = 0$, $x_6 = 12$, $x_7 = 10$) med $v = 30$. Enbart bivillkor 1 är aktivt. Optimallösingen är unik. Duallösningen läses av i målfunktionsraden under slackvariablerna. $y_1 = 1$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$, $v = 30$. Svar i ord: Beställ 15 000 bullar, ingen energidryck, ingen saltgurka och ingen blåbärssoppa.

1b: Bivillkor 2 och 3 är redundanta, dvs. får alltid positiva värden på slackvariablerna, och kan tas bort utan effekt. Vi har då i praktiken bara ett bivillkor, och får bara en variabel som är större än noll, dvs. i alla optimallösningar beställs bara en sort. Förslag: Inför flera bivillkor, bl.a. positiva undre gränser på alla varorna. Olinjär målfunktion kan övervägas, men skulle kräva en annan lösningsmetod.

1c: De optimala reducerade kostnaderna är $\hat{c}_1 = 0$, $\hat{c}_2 = -3$, $\hat{c}_3 = -2$, $\hat{c}_4 = -1$. Kräv $\hat{c}_j \geq 0$. Bullar (x_1) är redan med. Energidryck (x_2): $c_2 \geq 3 + 3 = 6$. Saltgurka (x_3): $c_3 \geq 1 + 2 = 3$. Blåbärssoppa (x_4): $c_4 \geq 4 + 1 = 5$.

1d: Reducerad kostnad: $\hat{c}_j = c_j - a_j^T y$. Eftersom $y = (1, 0, 0)$, blir det $\hat{c}_j = c_j - a_{1j}$. Kräv $\hat{c}_j \geq 0$. Bullar (x_1) är redan med. Energidryck (x_2): $\hat{c}_2 = 3 - a_{12} \geq 0$ om $a_{12} \leq 3$.

Saltgurka (x_3): $\hat{c}_3 = 1 - a_{13} \geq 0$ om $a_{13} \leq 1$. Blåbärssoppa (x_4): $\hat{c}_4 = 4 - a_{14} \geq 0$ om $a_{14} \leq 4$.

Uppgift 2

2a: Den givna startlösningen är tillåten och ger att basbågarna är alla utom (2,3), (5,6), (6,1), (8,9) och (9,1). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 4$, $y_3 = 8$, $y_4 = 12$, $y_5 = 16$, $y_6 = 19$, $y_7 = 24$, $y_8 = 29$, $y_9 = 31$, $y_{10} = 5$, $y_{11} = 20$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{23} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{56} = 2 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{61} = 29 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{89} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{91} = 34 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Lösningen är optimal.

2b: Nu fås $\hat{c}_{16} = -9 < 0$ (ej optimalt ty $x = 0$). Välj x_{16} som inkommande variabel, att öka. Cykeln blir 1-6-7-11-5-4-3-10-1, och maximal ändring blir 2 p.g.a. båge (3,4). Båge (3,4) blir då utgående. Nu får vi nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 4$, $y_3 = 8$, $y_4 = 3$, $y_5 = 7$, $y_6 = 10$, $y_7 = 15$, $y_8 = 20$, $y_9 = 22$, $y_{10} = 5$, $y_{11} = 11$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{23} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{34} = 9 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{56} = 2 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{61} = 20 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{89} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{91} = 25 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Lösningen är optimal.

Uppgift 3

Använd Dijkstras metod från nod 1 till alla andra (och använd resultatet baklänges). Vi får resultatet: $y_2 = 4$, väg 2-1, $y_3 = 8$, väg 3-10-1, $y_4 = 12$, väg 4-3-10-1, $y_5 = 15$, väg 10-6-1, $y_6 = 10$, väg 10-1, $y_7 = 10$, väg 7-9-1, $y_8 = 6$, väg 8-9-1, $y_9 = 3$, väg 9-1.

Uppgift 4

Skriv problemet på standardform.
$g_1(x) = x_1 + x_2 - 1 \leq 0$, $g_2(x) = x_2 - 0.3 \leq 0$, $g_3(x) = -x_1 \leq 0$, $g_4(x) = -x_2 \leq 0$,
$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 8x_1 - 3x_2 - 5 \\ 2x_2 - 3x_1 - 3 \end{pmatrix}$, $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_4(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. (Hessianen av $f(x)$ är positivt definit, och bivillkoren är linjära, så problemet är konvext.)

4a: Man kan se grafiskt att extrempunkterna är (0, 0), (0, 0.3), (0.7, 0.3) och (1, 0).

För punkt (0, 0):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 1 och 2 är inte aktiva, så $u_1 = 0$ och $u_2 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -5 \\ -3 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $u_3 = -5 < 0$ och $u_4 = -3 < 0$, vilket visar att KKT4 inte är uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

För punkt (0, 0.3):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 1 och 4 är inte aktiva, så $u_1 = 0$ och $u_4 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -5.9 \\ -2.4 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $u_2 = 2.4 > 0$ och $u_3 = -5.9 < 0$, så KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte

en KKT-punkt.

För punkt (0.7, 0.3):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 3 och 4 är inte aktiva, så $u_3 = 0$ och $u_4 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -0.3 \\ -4.5 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $u_1 = 0.3 > 0$ och $u_1 + u_2 = 4.5$, vilket ger $u_2 = 4.2 > 0$, så KKT4 är uppfyllt. Punkten är en KKT-punkt.

För punkt (1, 0):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 2 och 3 är inte aktiva, så $u_2 = 0$ och $u_3 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $u_1 = -3 < 0$ och $u_1 - u_4 = 6$, vilket ger $u_4 = -9 < 0$, så KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

Eftersom problemet är konvext, är KKT-punkten (0.7, 0.3) optimal.

4b: I startpunkten är bivillkor 1 och 4 aktiva. Första LP-problemet blir

$$\min\ z = 3d_1 - 6d_2 \text{ då } d_1 + d_2 \leq 0,\ d_2 \geq 0, \text{ samt } -1 \leq d \leq 1,$$

vilket har optimallösning $d = (-1, 1)$ med $z = -9$. Sätt $x^{(2)} = (1 - t, t)$. Maximal steglängd blir 0.3 pga. bivillkor 2. Linjesökning skulle ge $t = 9/16 > 0.3$, så vi får $t = t^{max} = 0.3$ och $x^{(2)} = (0.7, 0.3)$.

Nu är bivillkor 1 och 2 aktiva. LP-problemet blir

$$\min\ z = -0.3d_1 - 4.5d_2 \text{ då } d_1 + d_2 \leq 0,\ d_2 \leq 0, \text{ samt } -1 \leq d \leq 1,$$

vilket har optimallösning $d = (0, 0)$ med $z = 0$. Alltså är $x = (0.7, 0.3)$ optimal.
Svar: Ta 0.7 socker och 0.3 salt.

4c: I uppgift 4a fick vi för punkten (0.7, 0.3) $u_1 = 0.3$, vilket tyder på att en ökning av högerledet i bivillkor 1 med ε skulle ge en förbättring av målfunktionsvärdet med 0.3ε. Det gäller dock bara lokalt. Mer än så kan man inte säga.

Uppgift 5

Problemet är

$$\begin{array}{llrcrcrl}
\max & z = & 5x_1 & + & 7x_2 & & & \\
\text{då} & & 10x_1 & + & 15x_2 & \leq & 100 & (1) \\
 & & x_1 & & & \leq & 7 & (2) \\
 & & & & x_2 & \leq & 5 & (3) \\
 & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & \text{heltal}
\end{array}$$

P0: Grafisk lösning ger $x_1 = 7$, $x_2 = 2$ och $z = 49$, vilket ger $\bar{z} = 49$. Detta är ju en heltalig lösning, vilket ger $\underline{z} = 49$. Kapa grenen. Trädet avsökt. Bästa lösning $x_1 = 7$, $x_2 = 2$, med $z = 49$. Svar i ord: Använd 7 normala bilar och 2 skåpbilar.

Uppgift 6

6a: Problemet är

$$\begin{array}{lll} \max & z = & 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 4x_4 + 3x_5 \\ \text{då} & & 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 2x_5 \leq 5 \\ & & x_j \in \{0,1\} \forall j \end{array}$$

6b: Metod: Finn $\max(c_j/a_j)$, öka x_j, fortsätt tills kappsäcken är full. Kvoter: x_1 : $3/4 = 0.75$, $x_2 : 2/3 \approx 0.67$, $x_3 : 4/2 = 2$, $x_4 : 4/3 \approx 1.33$, $x_5 : 3/2 = 1.5$. Rangordning: x_3, x_5, x_4, x_1, x_2. Sätt $x_3 = 1$, $\hat{b} = 5 - 2 = 3$, sätt $x_5 = 1$, $\hat{b} = 3 - 2 = 1$, sätt $x_4 = 1/3$, $\hat{b} = 1 - 1 = 0$, kappsäcken full, sätt $x_1 = 0$, $x_2 = 0$. Detta ger LP-lösningen $(0, 0, 1, 1/3, 1)$ med $z = 25/3 \approx 8.33$.

6c: LP-optimum ger övre gräns 8. Avrundad lösning blir $(0, 0, 1, 0, 1)$ med $z = 7$, vilket ger undre gräns 7, Vår lösning är alltså högst en enhet från optimum.

Uppgift 7

7a: Man vill finna billigaste uppspännande träd. Använd Prims eller Krukals metod. Trädet blir (1,6), (2,5), (3,6), (4,6), (4,7), (5,6), med kostnad 38.

7b: Handelsresandeproblem (med återbesök). Bågarna (1,6) och (4,7) måste köras fram och tillbaka, och kan därför elimineras, kostnaden blir 22 för dem. (Detta gäller även relaxationen.)

I den återstående grafen har noderna 2 och 4 valens 2, vilket gör att båda bågarna till dessa noder bör användas. Lägg till båge (2,3) så har vi en rundtur, 1-6-5-2-3-4-7-4-6-1, med kostnaden 61.

Billigaste 1-träd (med eliminering av (1,6) och (4,7)) med nod 2 som "nod 1" ger kostnad 56, så vi får övre gräns 61 och undre gräns 56.

7c: Finn maxflöde från nod 5 till nod 1. Minsnittet ger då de gator som har begränsande kapacitet, och borde byggas ut. Lösningsgång: Sök maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 5-6-1, med kapacitet 10. Skicka 10 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (5,6) blir full.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får nu vägen 5-2-4-6-1, med kapacitet 7. Skicka 7 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (5,2) blir full.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får nu vägen 5-3-4-7-1, med kapacitet 5. Skicka 5 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Bågarna (5,3) och (7,1) blir fulla.) I nästa iteration kan man i Dijkstras metod bara märka/nå nod 5, så minsnittet går mellan nod 5 och de andra, dvs. över bågarna (5,2), (5,3) och (5,6). Maxflödet är 22.

Uppgift 8

Kinesiska brevbärarproblemet. Noderna 1, 6, 7 och 9 har udda valens. De förbinds billigast med bågarna (1,9) och (6,7), så dessa bågar dubbleras (körs mer än en gång) till kostnad av 8. En rundtur blir då t.ex. 1-2-3-5-6-7-9-1-6-7-8-9-1, med kostnaden $55 + 8 = 63$.

Uppgift 9

Efter första steget fås $\alpha = (4, 5, 5, 3, 4)$ och $\beta = (1, 0, 1, 2, 0)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 4 och 5 samt kolumn 1 och 5, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (5, 6, 6, 3, 4)$ och $\beta = (0, 0, 1, 2, -1)$. Nu fås t.ex. lösningen

$x_{12} = 1$, $x_{25} = 1$, $x_{31} = 1$, $x_{43} = 1$, $x_{54} = 1$, och total kostnad blir 26. Optimal duallösning är ovanstående. Summering av duallösningen ger 26, så starka dualsatsen är uppfylld.