Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

TAOP88
Lösning till tentamen
2018-10-24

Lösningar

Uppgift 1

1a: Målfunktionen är summan av konvexa funktioner (kvadrater) och bivillkoren linjära, så problemet är konvext.

Antag att q partier har minst 5%, och att de fick s röster. I exemplet är $q = 4$ och $s = 94$.
Ledningen ger via KKT2 att alla multiplikatorer för bivillkoren $x_j \geq 0$ ska vara noll.
KKT3 ger $2(x_j - dr_j) + u = 0$ för alla j, vilket ger $x_j = dr_j - u/2$ för alla j.
Sätt in i bivillkor 1: $\sum_{j=1}^{q} x_j = \sum_{j=1}^{q} (dr_j - u/2) = m$, vilket ger $ds - qu/2 = m$, vilket med siffror blir $0.1 * 94 - 2u = 10$, vilket ger $u = (9.4 - 10)/2 = -0.6/2 = -0.3$.

Det ger $x_j = dr_j - u/2 = dr_j + 0.15$ för alla j. Med siffror: $x_1 = 3.2 + 0.15 = 3.35$, $x_2 = 2.8 + 0.15 = 2.95$, $x_3 = 2.6 + 0.15 = 2.75$, $x_4 = 0.8 + 0.15 = 0.95$. Summering av detta verifierar att summan blir 10.

1b: Lagrangerelaxationen: $\varphi(u) = \min_x \sum_{j=1}^{n} (x_j - dr_j)^2 + u(\sum_{j=1}^{n} x_j - m)$.
För $u = 0$ fås, för varje j, $\varphi_j(0) = \min_{x_j} (x_j - dr_j)^2$, som har optimum för x_j i det heltal som ligger närmast dr_j. Det blir $x_1 = 3$, $x_2 = 3$, $x_3 = 3$, $x_4 = 1$, med $\varphi(0) = 0.2^2 + 0.2^2 + 0.4^2 + 0.2^2 = 0.04 + 0.04 + 0.16 + 0.04 = 0.28$. Detta ger en undre gräns på 0.28.

En subgradient fås genom att stoppa in lösningen i det relaxerade bivillkoret, vilket ger $\xi = 3 + 3 + 3 + 1 - 10 = 0$. Detta betyder dels att lösningen är tillåten, så vi får övre gräns lika med 0.28 (som är lika med den undre gränsen), samt att subgradienten är noll, så vi vill varken öka eller minska u. Optimallösningen är funnen.

Uppgift 2

2a: Vi får problemet

$$\begin{array}{lll} \max & z = & x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ \text{då} & & 23x_1 + 12x_2 + 5x_3 + 17x_4 \leq 28 \\ & & x_j \in \{0, 1\} \end{array}$$

Metod för att lösa LP-relaxationen: Finn $\max(c_j/a_j)$, öka x_j, fortsätt tills kappsäcken är full. Kvoter: $x_1 : 1/23$, $x_2 : 1/12$, $x_3 : 1/5$, $x_4 : 1/17$. Rangordning: x_3, x_2, x_4, x_1. (Nu betyder ju $x_j = 1$ att parti j inte ska sitta i regering, så det är inte konstigt att minst kommer först.)

P0: $x_3 = 1$, $\hat{b} = 28 - 5 = 23$, $x_2 = 1$, $\hat{b} = 23 - 12 = 11$, $x_4 = 11/17 \approx 0.65$, $\hat{b} = 11 - 11 = 0$, kappsäcken full, sätt $x_1 = 0$. Detta ger LP-lösningen $(0, 1, 1, 0.65)$

med $z = 2.65$, vilket ger $\bar{z} = 2$.
Förgrena över x_4: P1 = P0 + ($x_4 \leq 0$), P2 = P0 + ($x_4 \geq 1$).
P1: Som för P0, men $x_4 = 0$, vilket ger $x_1 = 11/23 \approx 0.48$, och $z = 2.48$, vilket inte förbättrar $\bar{z}$.
Förgrena över x_1: P3 = P1 + ($x_1 \leq 0$), P4 = P1 + ($x_1 \geq 1$).
P3: Förgreningen ger $x_1 = 0$ och $x_4 = 0$, så lösningen blir $x_2 = 1$ och $x_3 = 1$ (kappsäcken blir inte full), med $z = 2$. Lösningen är heltalig, vilket ger $\underline{z} = 2$.
Både P4 och P2 har $\bar{z} = 2$, så ingen av dem kan ge bättre lösning, och båda grenarna kapas.

Trädet avsökt. Bästa lösning $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 1$, $x_4 = 0$, med $z = 2$.
Svar i ord: Tant Brun (parti 2) och Tant Gredelin (parti 4) ska inte sitta i regeringen. Två partier ingår i regeringen.

2b: Bivillkor:

$$23x_1 + 12x_2 + 5x_3 + 17x_4 \geq 29 \quad (1)$$
$$x_1 + x_2 \leq 1 \quad (2)$$
$$x_1 - x_3 + x_4 \leq 1 \quad (3)$$
$$x_3 \leq x_2 \quad (4)$$

Första rundan ger inget, förgrena över x_1: P1 = P0 + ($x_1 = 0$), P2 = P0 + ($x_1 = 1$).
P1: $x_1 = 0$: (1) ger $x_2 = 1$ och $x_4 = 1$. Sedan händer inget mer, förgrena över x_3: P3 = P1 + ($x_3 = 0$), P4 = P1 + ($x_3 = 1$).
P3: Allt fixerat, kolla igen. Lösningen tillåten. Vi har en lösning med två partier. Kräv förbättring: $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 1 \quad (0)$
P4: Målfunktionsbivillkoret (0) kan ej uppfyllas. Kapa.
P2: $x_1 = 1$: (2) ger $x_2 = 0$, (4) ger $x_3 = 0$, (1) ger $x_4 = 1$, (3) ej uppfyllt. P2 gav ingen tillåten lösning. Kapa grenen.
Trädet avsökt. Bästa lösningen: (0, 1, 0, 1), dvs. parti 2 och 4 (Tant Brun och Farbror Blå) ska bilda regering.

Uppgift 3

3a: Inför slackvariabler x_5, x_6 och x_7. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	-4	-1	-5	-2	0	0	0	0
x_5	0	1	1	1	1	1	0	0	100
x_6	0	2	0	3	0	0	1	0	60
x_7	0	1	4	1	1	0	0	1	50

Först fås x_3 som inkommande variabel och x_6 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	-2/3	-1	0	-2	0	5/3	0	100
x_5	0	1/3	1	0	1	1	-1/3	0	80
x_3	0	2/3	0	1	0	0	1/3	0	20
x_7	0	1/3	4	0	1	0	-1/3	1	30

Sedan fås x_4 som inkommande variabel och x_7 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	0	7	0	0	0	1	2	160
x_5	0	0	-3	0	0	1	0	-1	50
x_3	0	2/3	0	1	0	0	1/3	0	20
x_4	0	1/3	4	0	1	0	-1/3	1	30

Nu är tablån optimal. Optimallösningen blir $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 20$, $x_4 = 30$, (samt $x_5 = 50$, $x_6 = 0$, $x_7 = 0$) med $v = 160$. Bivillkor 2 och 3 är aktiva. Bivillkor 1 är inte aktivt, dvs. man använder inte alla personer. Den begränsande faktorn är alltså inte antalet personer utan deras begränsade skicklighet. Duallösningen läses av i målfunktionsraden under slackvariablerna. $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = 2$, $v = 160$. Svar i ord: Använd 20 personer till att skicka SMS och 30 personer till valstugor.

3b: Optimallösningen är inte unik, ty $\hat{c}_1 = 0$. Man skulle därför kunna få en lika bra lösning om man valde x_1 som inkommande variabel. Det skulle ge x_3 som utgående variabel, så optimalbasen skulle då bestå av x_1, x_4 och x_5. Målfunktionsvärdet blir givetvis 160.

3c: Skuggpriser fås av duallösningen, och $y_3 = 2$ är störst, så man tjänar mest på att öka högerledet till bivillkor 3. (Även bivillkor 2 vore bra att öka högerledet för, $y_2 = 1$, medan fler personer inte hjälper, $y_1 = 0$.)

3d: Reducerad kostnad: $\hat{c}_2 = c_2 - a_2^T y$. Vi har $c_2 = 1$, $a_2^T = (1, 0, a_{32})$ och $y = (0, 1, 2)$, så $\hat{c}_4 = 1 - 2a_{32}$. Vi får $\hat{c}_2 \geq 0$ om $1 - 2a_{32} \geq 0$, dvs. $a_{32} \leq 0.5$.

Uppgift 4

4a: Den givna startlösningen är tillåten och ger att basbågarna är (1,3), (1,5), (2,5), (2,6) och (3,4). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = 19$, $y_4 = 35$, $y_5 = 16$, $y_6 = 27$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{12} = 9 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{46} = 25 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{53} = 10 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{54} = -2 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{56} = 4 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{64} = -1 < 0$, ej optimalt. Öka. Alltså välj x_{64} som inkommande variabel, att öka. Cykeln blir 6-4-3-1-5-2-6, och maximal ändring blir 5 p.g.a. båge (3,4). Båge (3,4) blir då utgående. Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = 19$, $y_4 = 34$, $y_5 = 16$, $y_6 = 27$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{12} = 9 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{34} = 1$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{46} = 24 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{53} = 10 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{54} = -1 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{56} = 4 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Lösningen är optimal.

Uppgift 5

5a: Handelsresandeproblem. Billigaste 1-träd ger kostnad 85, vilket är en undre gräns. Tillåten lösning är lite svårt att få. Närmaste granne med start i nod 2 ger turen 2-1-5-3-4-6-2, med kostnaden 98. Smart flyttning av två bågar i 1-trädet ger turen 1-3-4-6-5-2-1, med kostnaden 92. Vi får övre gräns 92 eller 98 och undre gräns 85.

Bivillkor: $x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{56} = 2$ (rätt valens för nod 5) eller $x_{12} + x_{25} + x_{15} \leq 2$ (förbjud liten cykel 1-2-5-1).

5b: Kinesiska brevbärarproblemet. Noderna 1, 2, 3 och 5 har udda valens. De förbinds billigast med bågarna (1,2) och (3,5), så dessa bågar dubbleras (körs mer än en gång) till kostnad av 23. En rundtur blir då t.ex. 1-2-5-6-2-1-3-4-5-3-5-1 med kostnaden

$147 + 23 = 170$.

Uppgift 6

6a: Använd Fords metod. Vi får vägen 1-4-7-3-5-6-9 med kostnad 13.

6b: $y_9 - y_7 = 13 - 8 = 5$, så 6 vore för dyrt.

Uppgift 7

Skriv problemet på standardform.
$g_1(x) = x_1 + x_2 - 3 \le 0$, $g_2(x) = x_1 - 2 \le 0$, $g_3(x) = -x_1 \le 0$, $g_4(x) = x_2 - 2 \le 0$, $g_5(x) = -x_2 \le 0$,
$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3 \\ 2x_2 - 5 \end{pmatrix}$, $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_4(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. $\nabla g_5(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. (Målfunktionen är summan av en-dimensionella konvexa funktioner, och bivillkoren är linjära, så problemet är konvext.)

I startpunkten är bivillkor 3 och 5 aktiva. Första LP-problemet blir
min $z = -3d_1 - 5d_2$ då $d_1 \ge 0$, $d_2 \ge 0$, samt $-1 \le d \le 1$,
vilket har optimallösning $d = (1, 1)$ med $z = -8$. Sätt $x^{(2)} = (t, t)$. Maximal steglängd blir 1.5 pga. bivillkor 1. Linjesökning skulle ge $t = 2 > 1.5$, så vi får $t = t^{max} = 1.5$ och $x^{(2)} = (1.5, 1.5)$.

Nu är bivillkor 1 aktivt. LP-problemet blir
min $z = -2d_2$ då $d_1 + d_2 \le 0$, samt $-1 \le d \le 1$,
vilket har optimallösning $d = (-1, 1)$ med $z = -2$. Sätt $x^{(3)} = (1.5 - t, 1.5 + t)$. Maximal steglängd blir 0.5 pga. bivillkor 4. Linjesökning skulle ge $t = 0.5$, så vi får $t = 0.5$ och $x^{(3)} = (1, 2)$.

Nu är bivillkor 1 och 4 aktiva. LP-problemet blir
min $z = -d_1 - d_2$ då $d_1 + d_2 \le 0$, $d_2 \le 0$, samt $-1 \le d \le 1$,
vilket har optimallösning $d = (0, 0)$ med $z = 0$. Alltså är $x = (1, 2)$ optimal.
Svar: Missgynna parti B dubbelt så mycket som parti A.

Uppgift 8

Finn maxflöde från nod 1 till nod 9. Minsnittet ger då de gator som har begränsar flödet, och borde göras färdigt snabbt. Lösningsgång: Sök maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 1-2-5-6-9, med kapacitet 9. Skicka 9 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (5,6) blir full.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får nu vägen 1-4-7-9, med kapacitet 9. Skicka 9 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (4,7) blir full.) I nästa iteration kan man i Dijkstras metod bara märka/nå noderna 1, 2, 3, 4 och 5, så minsnittet går mellan dessa noder och de andra, dvs. över bågarna (4,7) och (5,6) (samt (7,3) baklänges). Maxflödet är 18.

Uppgift 9

Efter första steget fås $\alpha = (0, 1, 7, 0, 1)$ och $\beta = (0, 0, 1, 0, 0)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 3, 4 och 5 samt kolumn 4, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (2, 3, 7, 0, 1)$ och $\beta = (0, 0, 1, -2, 0)$. Nu fås t.ex. lösningen $x_{12} = 1$, $x_{24} = 1$, $x_{33} = 1$, $x_{45} = 1$, $x_{51} = 1$, och total kostnad blir 12. Optimal duallösning är ovanstående. Summering av duallösningen ger 12, så starka dualsatsen är uppfylld.