Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

TAOP88
Lösning till tentamen
2019-01-07

Lösningar

Uppgift 1

1a: Inför slackvariabler x_5, x_6 och x_7. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	-2	-4	-6	0	0	0	0
x_4	0	1	1	2	1	0	0	200
x_5	0	2	1	0	0	1	0	180
x_6	0	0	1	1	0	0	1	150

Först fås x_3 som inkommande variabel och x_4 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	1	-1	0	3	0	0	600
x_3	0	0.5	0.5	1	0.5	0	0	100
x_5	0	2	1	0	0	1	0	180
x_6	0	-0.5	0.5	0	-0.5	0	1	50

Sedan fås x_2 som inkommande variabel och x_6 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	0	0	0	2	0	2	700
x_3	0	1	0	1	1	0	-1	50
x_5	0	3	0	0	1	1	-2	80
x_2	0	-1	1	0	-1	0	2	100

Nu är tablån optimal. Optimallösningen blir $x_1 = 0$, $x_2 = 100$, $x_3 = 50$, (samt $x_4 = 0$, $x_5 = 80$, $x_6 = 0$) med $z = 700$. Bivillkor 1 och 3 är aktiva. Duallösningen läses av i målfunktionsraden under slackvariablerna. $y_1 = 2$, $y_2 = 0$, $y_3 = 2$, $v = 700$. Svar i ord: Gör 100 kakor av sort 2 och 50 av sort 3.

1b: Optimallösningen är inte unik, ty $\hat{c}_1 = 0$. Man skulle därför kunna få en lika bra lösning om man valde x_1 som inkommande variabel. Det skulle ge x_5 som utgående variabel, så optimalbasen skulle då bestå av x_1, x_2 och x_3. Målfunktionsvärdet blir givetvis 700.

1c: Skuggpriser fås av duallösningen, och $y_3 = 2$ är störst av y_2 och y_3 (bivillkor 1 handlar ju inte om råvaror), så man tjänar mest på att öka högerledet till bivillkor 3, dvs. skaffa mer av råvara 2.

1d: Ny variabel x_7. Reducerad kostnad: $\hat{c}_7 = c_2 - a_2^T y = 5 - (2 + 0 + 2) = 1 > 0$, Ja, vinsten skulle öka om man ökade x_7, dvs. bakade nya kakan.

Uppgift 2

Börja med att för enkelhets skull numrera om variablerna, så att x_2 blir x_1 och x_3 blir x_2. (Ej nödvändigt.) Byt tecken på målfunktionen: Min $f(x) = -4x_1 - 6x_2 + x_1^2 + 2x_2^2$. Målfunktionen är summan av konvexa funktioner (linjära funktioner och kvadrater) och bivillkoren linjära, så problemet är konvext.

Skriv problemet på standardform.
$g_1(x) = x_1 + 2x_2 - 2 \leq 0$, $g_2(x) = x_1 - 1.8 \leq 0$, $g_3(x) = x_1 + x_2 - 1.5 \leq 0$, $g_4(x) = -x_1 \leq 0$, $g_5(x) = -x_2 \leq 0$,
$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} -4 + 2x_1 \\ -6 + 4x_2 \end{pmatrix}$, $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$,
$\nabla g_4(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_5(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

2a: I startpunkten är bivillkor 4 och 5 aktiva. Första LP-problemet blir

min $z = -4d_1 - 6d_2$ då $d_1 \geq 0$, $d_2 \geq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$,

vilket har optimallösning $d = (1, 1)$ med $z = -10$. Sätt $x^{(2)} = (t, t)$. Maximal steglängd blir 2/3 pga. bivillkor 1. Linjesökning ger $t = 5/3$, så vi får $t = t^{max} = 2/3$ och $x^{(2)} = (2/3, 2/3)$.

Nu är bara bivillkor 1 aktivt. LP-problemet blir

min $z = -8/3\, d_1 - 10/3\, d_2$ då $d_1 + 2d_2 \leq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$,

vilket har optimallösning $d = (1, -1/2)$ med $z = -1$. Sätt $x^{(3)} = (2/3 + t, 2/3 - t/2)$. Maximal steglängd blir 1/3 pga. bivillkor 3. Linjesökning ger också 1/3, så vi sätter $t = 1/3$ och får $x^{(3)} = (1, 1/2)$.

Nu är bivillkor 1 och 3 aktiva. LP-problemet blir

min $z = -2d_1 - 4d_2$ då $d_1 + 2d_2 \leq 0$, $d_1 + d_2 \leq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$,

vilket har optimallösning $d = (0, 0)$ med $z = 0$. Alltså är $x = (1, 1/2)$ optimal.
Svar: Gör 100 kakor av sort 2 och 50 kakor av sort 3. (Det blev samma svar som i uppgift 1.)

2b: Man kan se grafiskt att extrempunkterna är (0,0), (0, 1), (1, 1/2) och (3/2, 0).

För punkt (0, 0):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkoren 1, 2 och 3 är inte aktiva, så $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ och $u_3 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_5 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Detta ger $u_4 = -4$ och $u_5 = -6$, så KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

För punkt (0, 1):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkoren 2, 3 och 5 är inte aktiva, så $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ och $u_5 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Detta ger $u_1 = 1$ och $u_4 = -3$, så KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

För punkt (1, 1/2):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkoren 2, 4 och 5 är inte aktiva, så $u_2 = 0$, $u_4 = 0$ och $u_5 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Detta ger $u_1 + u_3 = 2$ och $2u_1 + u_3 = 4$, vilket ger $u_1 = 2$ och $u_3 = 0$, så KKT4 är uppfyllda. Punkten är en KKT-punkt.

För punkt (3/2, 0):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkoren 1, 2 och 4 är inte aktiva, så $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ och $u_4 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -1 \\ -6 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_5 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Detta ger $u_3 = 1$ och $u_3 - u_5 = 6$, vilket ger $u_5 = -5$, så KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

Sammanfattningsvis är endast punkten (1, 1/2) en KKT-punkt, och optimal, eftersom problemet är konvext.

2c: Lagrangerelaxationen:
$\varphi(u) = \min_{x \in X} -4x_1 - 6x_2 + x_1^2 + 2x_2^2 + u_1(x_1 + 2x_2 - 2) + u_2(x_1 + x_2 - 1.5)$
där $X = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 1.8, x_2 \geq 0\}$. Eftersom subproblemet är separabelt, kan vi skriva det som $\varphi(u) = (\min_{0 \leq x_1 \leq 1.8}(x_1^2 + (u_1 + u_2 - 4)x_1)) + (\min_{x_2 \geq 0}(2x_2^2 + (2u_1 + u_2 - 6)x_2)) - 2u_1 - 1.5u_2$, vilket betyder att vi kan göra optimering över x_1 och x_2 separat.

För $u = (0,0)$ fås $\varphi(0,0) = \min_{x \in X} -4x_1 - 6x_2 + x_1^2 + 2x_2^2$, som har optimum för $x_1 = 1.8$ och $x_2 = 3/2$, vilket ger $\varphi(0,0) = -8.46$, och en undre gräns på -8.46. Lösningen är inte tillåten.

För $u = (1,1)$ fås $\varphi(1,1) = \min_{x \in X} -4x_1 - 6x_2 + x_1^2 + 2x_2^2 + (x_1 + 2x_2 - 2) + (x_1 + x_2 - 1.5) = \min_{x \in X} -2x_1 - 3x_2 + x_1^2 + 2x_2^2 - 3.5$, som har optimum för $x_1 = 1$ och $x_2 = 3/4$, vilket ger $\varphi(1,1) = -2 - 9/4 + 1 + 9/8 - 3.5 = -45/8 = -5.625$, vilket ger en förbättrad undre gräns -5.625. Lösningen är fortfarande inte tillåten.

Eftersom inget av bivillkoren är uppfyllt, bör de bästa värdena på u_1 och u_2 båda vara större än 1.

Uppgift 3

(Obs: min-problem och ett $\geq$-bivillkor.)
P0: Grafisk lösning ger $x_1 = 0.5$, $x_2 = 3$ och $z = 11.5$, vilket ger $\underline{z} = 12$.
Förgrena över x_1: P1 = P0 + $(x_1 \leq 0)$, P2 = P0 + $(x_1 \geq 1)$.
P1: Saknar tillåten lösning. Kapa.
P2: Grafisk lösning: $x_1 = 1$, $x_2 = 7/3 = 2.333$, $z = 12$, vilket ger $\underline{z} = 12$ (dvs. ingen förbättring av $\underline{z}$).
Förgrena över x_2: P3 = P2 + $(x_2 \leq 2)$, P4 = P2 + $(x_2 \geq 3)$.
P3: Grafisk lösning: $x_1 = 1.25$, $x_2 = 2$, $z = 12.25$, vilket ger $\underline{z} = 13$.
Förgrena över x_1: P5 = P3 + $(x_1 \leq 1)$, P6 = P3 + $(x_1 \geq 2)$.
P5: Saknar tillåtan lösning. Kapa.

P6: Grafisk lösning: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $z = 13$, heltalig lösning, vilket ger $\bar{z} = 13$. Kapa.
P4: Grafisk lösning: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $z = 14$, vilket ger $\underline{z} = 14$. Kapa, ty sämre än $\bar{z} = 13$.

Trädet avsökt. Bästa lösning $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, med $z = 13$.
Svar i ord: Kör två gånger med bil 1 och en gång med bil 2.

Uppgift 4

4a: Den givna startlösningen är tillåten och ger att basbågarna är (1,5), (2,3), (3,5), (5,4) och (5,6). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = -6$, $y_3 = 1$, $y_4 = 12$, $y_5 = 7$, $y_6 = 12$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{13} = 5 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{14} = -7 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{25} = -5 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{26} = -12 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{46} = 7 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Alla bågar optimala. Lösningen optimal.

4b: Ny båge, reducerad kostnad: $\hat{c}_{24} = 15 + y_2 - y_4 = -3 < 0$, ej optimalt. Öka.
Alltså välj x_{24} som inkommande variabel, att öka. Cykeln blir 2-4-5-3-2, och maximal ändring blir 2, pga. båge (2,4), som blir utgående. Inga nodpriser ändras, så inga reducerade kostnader ändras. Vi har nu $\hat{c}_{24} = -3 < 0$, optimalt, ty $x = u$.
Lösningen är optimal.

Uppgift 5

5a: Handelsresandeproblem. Billigaste 1-träd ger kostnad 39, vilket är en undre gräns. Tillåten lösning är lite svårare att få. Närmaste granne med start i nod 6 ger turen 6-7-8-9-1-2-3-4-5-6, med kostnaden 45. Flyttning av två bågar i 1-trädet ger turen 1-2-4-3-7-5-6-8-9-1, med kostnaden 50. Vi får övre gräns 45 (eller 50) och undre gräns 39, så vår lösning kan vara 6 (eller 11) enheter sämre än optimum, men inte mer.

5b: Inför direktbågar mellan alla noder som man kan ta sig till via nod 4 eller nod 6 (om inte en billigare direktbåge redan finns).
För nod 4: inför båge (2, 5) med kostnad 14 och båge (3, 5) med kostnad 10.
För nod 6: inför båge (5, 8) med kostnad 15.
Lös som vanligt TSP.

Uppgift 6

6a: Använd Dijkstras metod. Vi får vägen 1-3-5-8-10, med kostnad 31.

6b: Använd Fords metod. Vi får vägen 1-2-3-5-8-9-10, med kostnad 2.

6c: Båge (7, 9) ingår i basträdet, och $y_7 = 19$, så vi får $y_9 = 19 + c_{79}$ och skulle kunna få $y_{10} = y_9 + 5 = 24 + c_{79}$. Vi vill få $y_{10} \leq 31$, vilket ger $24 + c_{79} \leq 31$, dvs. $c_{79} \leq 7$.

Uppgift 7

7a: Finn maxflöde från nod 1 till nod 10. Lösningsgång: Sök maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 1-3-9-10, med kapacitet 13. Skicka 13 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (3, 9) blir full.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får nu vägen 1-7-8-10, med kapacitet 9. Skicka 9 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (7, 8) blir full.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får nu vägen 1-4-5-10, med kapacitet 8. Skicka 8 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (4, 5) blir full.)

I nästa iteration kan man i Dijkstras metod bara märka/nå noderna 1, 2, 3, 4, 6 och 7, så minsnittet går mellan dessa noder och de andra, dvs. över bågarna (3, 9), (4, 5) och (7, 8). Maxflödet är 30, dvs. 3000 personer kan sätta sig i säkerhet. Det är inte så bra, eftersom det finns 6200 personer som skulle vilja ta sig ut (summan av kapaciteterna på bågarna från nod 1).

7b: Kinesiska brevbärarproblemet. Noderna 2, 3, 4 och 5 har udda valens. De förbinds billigast med bågarna (2, 3) och (4, 5), så dessa bågar dubbleras (körs mer än en gång) till kostnad av 10. En rundtur blir då t.ex. 2-3–9-5-8-7-6-4-5-4-3-2, med kostnaden $54 + 10 = 64$.

Uppgift 8

Efter första steget fås $\alpha = (0, 6, 8, 2, 1)$ och $\beta = (0, 0, 0, 0, 0)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 3 och 5 samt kolumn 1 och 4, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (1, 7, 8, 3, 1)$ och $\beta = (-1, 0, 0, -1, 0)$. Nu fås t.ex. lösningen $x_{11} = 1$, $x_{23} = 1$, $x_{32} = 1$, $x_{44} = 1$, $x_{55} = 1$, och total kostnad blir 18. Optimal duallösning är ovanstående α och β. Summering av duallösningen ger 18, så starka dualsatsen är uppfylld.