Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

TAOP88
Lösning till tentamen
2019-05-29

Lösningar

Uppgift 1

1a: Inför slackvariabler x_4 och x_5. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	-3	-7	-5	0	0	0
x_4	0	1	2	2	1	0	12
x_5	0	4	2	0	0	1	10

Först fås x_2 som inkommande variabel och x_5 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	11	0	-5	0	3.5	35
x_4	0	-3	0	2	1	-1	2
x_2	0	2	1	0	0	0.5	5

Sedan fås x_3 som inkommande variabel och x_4 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\hat{b}$
z	1	3.5	0	0	2.5	1	40
x_3	0	-1.5	0	1	0.5	-0.5	1
x_2	0	2	1	0	0	0.5	5

Nu är tablån optimal. Optimallösningen blir $x_1 = 0$, $x_2 = 5$, $x_3 = 1$, (samt $x_4 = 0$, $x_5 = 0$) med $z = 40$. Bivillkor 1 och 2 är aktiva, så det blir inga kakor över. Duallösningen läses av i målfunktionsraden under slackvariablerna. $y_1 = 2.5$, $y_2 = 1$, $v = 40$. Svar i ord: Gör 5 påsar av sort 2 och en påse av sort 3.

1b: Skuggpriser fås av duallösningen, och $y_1 = 2.5$ är störst, så man tjänar mest på att öka högerledet till bivillkor 1, dvs. baka mer mörka kakor.

1c: Ny variabel x_6. Reducerad kostnad: $\hat{c}_6 = c_6 - a_6^T y = c_6 - (2.5 + 3) = c_6 - 5.5 > 0$ om $c_6 > 5.5$. Vinsten behöver vara större än 5.5.

1d: (Standard.)

Uppgift 2

Målfunktionen är summan av konvexa funktioner (linjära funktioner och kvadrater) och bivillkoren linjära, så problemet är konvext.

2a: Skriv problemet på standardform.
$g_1(x) = 2x_1 + 4x_2 - 6 \leq 0$, $g_2(x) = x_1 - 1 \leq 0$, $g_3(x) = x_2 - 2 \leq 0$, $g_4(x) = -x_1 \leq 0$, $g_5(x) = -x_2 \leq 0$,

$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 3 \\ 4x_2 - 5 \end{pmatrix}$, $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_4(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_5(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Man kan se grafiskt att extrempunkterna är (0,0), (1, 0), (1, 1) och (0, 3/2).

För punkt (0, 0):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkoren 1, 2 och 3 är inte aktiva, så $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ och $u_3 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -3 \\ -5 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_5 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Detta ger $u_4 = -3$ och $u_5 = -5$, så KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

För punkt (1, 0):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkoren 1, 3 och 4 är inte aktiva, så $u_1 = 0$, $u_3 = 0$ och $u_4 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_5 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Detta ger $u_2 = 1$ och $u_5 = -5$, så KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

För punkt (1, 1):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkoren 3, 4 och 5 är inte aktiva, så $u_3 = 0$, $u_4 = 0$ och $u_5 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Detta ger $2u_1 + u_2 = 1$ och $4u_1 = 1$, vilket ger $u_1 = 1/4$ och $u_2 = 1/2$, så KKT4 är uppfyllda. Punkten är en KKT-punkt.

För punkt (0, 3/2):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkoren 2, 3 och 5 är inte aktiva, så $u_2 = 0$, $u_3 = 0$ och $u_5 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Detta ger $2u_1 - u_4 = 3$ och $4u_1 = -1$, vilket ger $u_1 = -1/4$ och $u_4 = -7/2$, så KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

Sammanfattningsvis är endast punkten (1, 1) en KKT-punkt, och optimal, eftersom problemet är konvext.

2b: I startpunkten är bivillkor 4 och 5 aktiva. Första LP-problemet blir
min $z = -3d_1 - 5d_2$ då $d_1 \geq 0$, $d_2 \geq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$,
vilket har optimallösning $d = (1, 1)$ med $z = -8$. Sätt $x^{(2)} = (t, t)$. Maximal steglängd blir 1. Linjesökning ger $t = 4/3$, så vi får $t = t^{max} = 1$ och $x^{(2)} = (1, 1)$.

Nu är bivillkor 1 och 2 aktiva. LP-problemet blir
min $z = -d_1 - d_2$ då $2d_1 + 4d_2 \leq 0$, $d_1 \leq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$,

vilket har optimallösning $d = (0, 0)$ med $z = 0$. Alltså är $x = (1, 1)$ optimal.
Svar: Bästa lösningen blir faktiskt att inte ändra mängderna.

2c: Lagrangerelaxationen:
$\varphi(u) = \min_{x \in X} x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_1 - 5x_2 + u_1(2x_1 + 4x_2 - 6)$
där $X = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 2\}$. Eftersom subproblemet är separabelt, kan vi skriva det som $\varphi(u) = (\min_{0 \leq x_1 \leq 1}(x_1^2 + (2u_1 - 3)x_1)) + (\min_{0 \leq x_2 \leq 2}(2x_2^2 + (4u_1 - 5)x_2)) - 6u_1$, vilket betyder att vi kan göra optimering över x_1 och x_2 separat.

För $u = 0$ fås $\varphi(0) = \min_{x \in X} x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_1 - 5x_2$, som har optimum för $x_1 = 1$ och $x_2 = 5/4$, vilket ger $\varphi(0) = -41/8 = -5.125$, och en undre gräns på -5.125. Lösningen är inte tillåten.

För $u = 1$ fås $\varphi(1) = \min_{x \in X} x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_1 - 5x_2 + (2x_1 + 4x_2 - 6) = \min_{x \in X} x_1^2 + 2x_2^2 - x_1 - x_2 - 6$, som har optimum för $x_1 = 1/2$ och $x_2 = 1/4$, vilket ger $\varphi(1) = -3/8 - 6 = -51/8 = -6.375$, vilket inte ger en bättre undre gräns. Lösningen är tillåten, så vi får en övre gräns på $-19/8 = -2.375$.

Eftersom $u = 0$ är för litet och $u = 1$ är för stort, bör det bästa värdet på u ligga mellan 0 och 1. De bästa gränserna är nu en undre på -5.125 och en övre på -2.375.

Uppgift 3

Kinesiska brevbärarproblemet. Noderna 3, 4, 5, 7, 8 och 9 har udda valens. De förbinds billigast med bågarna (3, 4), (5, 7) och (8, 9), så dessa bågar dubbleras (körs mer än en gång) till kostnad av 15. En rundtur blir då t.ex. 1-2-3-4-3-5-4-6-5-2-7-5-7-6-9-7-8-9-8-1 med kostnaden $90 + 15 = 105$.

Uppgift 4

4a: Den givna startlösningen är tillåten och ger att basbågarna är (1,8), (2,5), (2,7), (3,4), (4,6), (5,6), (7,9) och (8,9). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = -3$, $y_4 = 2$, $y_5 = 5$, $y_6 = 8$, $y_7 = 3$, $y_8 = 6$, $y_9 = 13$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{12} = 7 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{23} = 10 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{53} = 13 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{54} = 7 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{69} = 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{75} = 5 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{76} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{87} = 11 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), Alla bågar optimala. Lösningen optimal.

4b: Ny reducerad kostnad: $\hat{c}_{69} = 2 + y_6 - y_9 = -3 < 0$, ej optimalt. Öka.
Alltså välj x_{69} som inkommande variabel, att öka. Cykeln blir 6-9-7-2-5-6, och maximal ändring blir 2, pga. båge (5,6), som blir utgående.

Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$, $y_4 = 5$, $y_5 = 5$, $y_6 = 11$, $y_7 = 3$, $y_8 = 6$, $y_9 = 13$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{12} = 7 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{23} = 7 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{53} = 13 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{54} = 4 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{56} = -3 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{75} = 5 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{76} = -2 < 0$ (ej optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{87} = 11 > 0$ (optimalt ty $x = 0$).
Välj x_{76} som inkommande variabel, att öka. Cykeln blir 7-6-9-7, och maximal ändring blir 1, pga. båge (7,9), som blir utgående.

Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 2$, $y_3 = 0$, $y_4 = 5$, $y_5 = 7$, $y_6 = 11$, $y_7 = 5$, $y_8 = 6$, $y_9 = 13$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{12} = 5 > 0$ (optimalt ty $x = 0$),

$\hat{c}_{23} = 9 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{53} = 12 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{54} = 6 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{56} = -1 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{75} = 5 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{79} = 2 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{87} = 9 > 0$ (optimalt ty $x = 0$).
Alla bågar optimala. Lösningen optimal.

Uppgift 5

Ta bort noderna 5 och 7 och alla bågar genom dem, och finn maxflöde från nod 1 till nod 4. Lösningsgång: Sök maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 1-8-9-6-4, med kapacitet 8. Skicka 8 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (1, 8) och (9, 6) blir fulla.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får nu vägen 1-2-3-4, med kapacitet 5. Skicka 5 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (3, 4) blir full.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får nu vägen 1-9-8-6-4, med kapacitet 5. Båge (8, 9) används bakåt. Skicka 5 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (1, 9) blir full.)

I nästa iteration kan man i Dijkstras metod bara märka/nå noderna 1, 2 och 3, så minsnittet går mellan dessa noder och de andra, dvs. över bågarna (1, 8), (1, 9) och (3, 4). Maxflödet är 18.

Uppgift 6

(Obs: Min-problem och $\geq$-bivillkor.)

Den givna tillåtna lösningen ger $\bar{z} = 136$, och vi söker en bättre lösning än detta, dvs. ett mindre målfunktionsvärde. Ledningen ger att det inte finns något på 135, så vi kräver högst 134.

P0: Grafisk lösning ger $x_1 = 2.5$, $x_2 = 0$ och $z = 125$, vilket ger $\underline{z} = 125$.
Förgrena över x_1: P1 = P0 + ($x_1 \leq 2$), P2 = P0 + ($x_1 \geq 3$).
P1: Grafisk lösning: $x_1 = 2$, $x_2 = 2.5$, $z = 130$, vilket ger $\underline{z} = 130$.
Förgrena över x_2: P3 = P1 + ($x_2 \leq 2$), P4 = P1 + ($x_2 \geq 3$).
P3: Med $x_2 \leq 2$ ger bivillkoret $x_1 \geq 2.1$, vilket inte kan uppfyllas, ty $x_1 \leq 2$. Problemet saknar tillåten lösning, vilket också kan ses grafiskt. Kapa.
P4: Grafisk lösning: $x_1 = 1.9$, $x_2 = 3$, $z = 131$, vilket ger $\underline{z} = 131$.
Förgrena över x_1: P5 = P4 + ($x_1 \leq 1$), P6 = P4 + ($x_1 \geq 2$).
P5: Grafisk lösning: $x_1 = 1$, $x_2 = 7.5$, $z = 140$, vilket ger $\underline{z} = 140$. Kapa, ty sämre än $\bar{z} = 134$.
P6: Grafisk lösning: $x_1 = 2$, $x_2 = 3$, $z = 136$, vilket ger $\underline{z} = 136$. Kapa, ty sämre än $\bar{z} = 134$.
P2: Grafisk lösning: $x_1 = 3$, $x_2 = 0$, $z = 150$, heltalig lösning, men sämre än $\bar{z} = 134$. Kapa.

Trädet avsökt. Ingen bättre lösning funnen.

Uppgift 7

Handelsresandeproblem. Billigaste 1-träd ger kostnad 42, vilket är en undre gräns. Tillåten lösning är lite svårare att få. Närmaste granne ger en tur som inte får med nod 7. Byt båge (2,5) mot (2,7) och (5,7). Denna tur har kostnaden 46. Vi får övre gräns 46 och undre gräns 42, så vår lösning kan vara 4 enheter sämre än optimum, men inte mer.

Uppgift 8

Använd Dijkstras metod, och finn optimala märkningar för alla noder. Vi får nodpriserna $y_5 = 20$ och $y_6 = 11$, så det blir bättre att åka till nod 6. Nysta upp från den. Vi får vägen 1 - 8 - 6, med kostnad 11.

Uppgift 9

9a: Efter första steget fås $\alpha = (0, 0, 0, 0, 1)$ och $\beta = (0, 5, 4, 2, 0)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 4 och 5 samt kolumn 1, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (1, 1, 1, 0, 1)$ och $\beta = (-1, 5, 4, 2, 0)$. Nu kan man stryka alla nollor genom att stryka rad 1, 4 och 5 samt kolumn 1, med minsta ostrukna element 2, vilket gör att vi får $\alpha = (1, 3, 3, 0, 1)$ och $\beta = (-3, 5, 4, 2, 0)$. Nu fås t.ex. lösningen $x_{13} = 1$, $x_{21} = 1$, $x_{32} = 1$, $x_{44} = 1$, $x_{55} = 1$, och total kostnad blir 16. Optimal duallösning är ovanstående α och β. Summering av duallösningen ger 16, så starka dualsatsen är uppfylld.

9b: Om alla kostnader i första kolumnen ökar med 3, kan en optimal dual lösning fås genom att öka β_1 med 3. För övrigt är resten av duallösningen oförändrad. Eftersom precis samma reducerade kostnader fås, ändras inte den primala lösningen. (Man kan också motivera detta med att alla tillåtna lösningar blir precis 3 dyrare.)