Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

TAOP88
Lösning till tentamen
2019-08-30

Lösningar

Uppgift 1

1a: Inför slackvariabler x_5, x_6 och x_7. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	-8	-15	-12	-10	0	0	0	0
x_5	0	1	2	4	0	1	0	0	10
x_6	0	1	2	0	2	0	1	0	7
x_7	0	2	0	0	2	0	0	1	8

Först fås x_2 som inkommande variabel och x_6 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	-1/2	0	-12	5	0	15/2	0	105/2
x_5	0	0	0	4	-2	1	-1	0	3
x_2	0	1/2	1	0	1	0	1/2	0	7/2
x_7	0	2	0	0	2	0	0	1	8

Sedan fås x_3 som inkommande variabel och x_5 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	-1/2	0	0	-1	3	9/2	0	123/2
x_3	0	0	0	1	-1/2	1/4	-1/4	0	3/4
x_2	0	1/2	1	0	1	0	1/2	0	7/2
x_7	0	2	0	0	2	0	0	1	8

Därefter fås x_4 som inkommande variabel och x_2 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	0	1	0	0	3	5	0	65
x_3	0	1/4	1/2	1	0	1/4	0	0	5/2
x_4	0	1/2	1	0	1	0	1/2	0	7/2
x_7	0	1	-2	0	0	0	-1	1	1

Nu är tablån optimal. Optimallösningen blir $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 2.5$, $x_4 = 3.5$, (samt $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, $x_7 = 1$) med $z = 65$. Bivillkor 1 och 2 är aktiva, så det blir inga frön av sort A eller B över. Det blir dock 100 frön av sort C över (ty $x_7 = 1$). Duallösningen läses av i målfunktionsraden under slackvariablerna: $y_1 = 3$, $y_2 = 5$, $y_3 = 0$, $v = 65$. Svar i ord: Gör 2.5 påsar av sort 3 och 3.5 påsar av sort 4.

1b: Skuggpriser fås av duallösningen, och $y_2 = 5$ är störst, så man tjänar mest på att öka högerledet till bivillkor 2, dvs. köpa frön av sort B.

1c: Ny variabel x_8. Reducerad kostnad: $\hat{c}_8 = c_8 - a_8^T y = c_8 - 33/4 > 0$ om $c_8 > 8.25$. Vinsten behöver vara större än 8.25.

Uppgift 2

Målfunktionen är summan av konvexa funktioner (linjära funktioner och kvadrater) och bivillkoren linjära, så problemet är konvext.

2a: Bivillkoren $x_1 \leq 1$ och $x_2 \leq 1$ är redundanta och kan tas bort. (Sådant är alltid bra att göra för KKT-villkoren.)

Skriv problemet på standardform.
$g_1(x) = x_1 + x_2 - 1 \leq 0$, $g_2(x) = -x_1 \leq 0$, $g_3(x) = -x_2 \leq 0$,
$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2 \\ 4x_2 - 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Man kan se grafiskt att extrempunkterna är (0,0), (1, 0) och (0, 1).

För punkt (0, 0):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 1 är inte aktivt, så $u_1 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Detta ger $u_2 = -2$ och $u_3 = -1$, så KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

För punkt (1, 0):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 2 är inte aktivt, så $u_2 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Detta ger $u_1 = 0$ och $u_3 = -1$, så KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

För punkt (0, 1):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 3 är inte aktivt, så $u_3 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Detta ger $u_1 = -3$ och $u_2 = -5$, så KKT4 är inte uppfyllda. Punkten är inte en KKT-punkt.

2b: I startpunkten är bivillkor 2 och 3 aktiva. Första LP-problemet blir
min $z = -2d_1 - d_2$ då $d_1 \geq 0$, $d_2 \geq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$,
vilket har optimallösning $d = (1, 1)$ med $z = -3$. Sätt $x^{(2)} = (t, t)$. Maximal steglängd blir 1/2. Linjesökning ger $t = 1/2$, så vi får $x^{(2)} = (1/2, 1/2)$.

Nu är bivillkor 1 aktivt. LP-problemet blir
min $z = -d_1 + d_2$ då $d_1 + d_2 \leq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$,
vilket har optimallösning $d = (1, -1)$ med $z = -2$. Sätt $x^{(2)} = (1/2 + t, 1/2 - t)$. Maximal steglängd blir 1/2. Linjesökning ger $t = 1/3$, så vi får $x^{(2)} = (5/6, 1/6)$.

Nu är bivillkor 1 aktivt. LP-problemet blir

min $z = -1/3d_1 - 1/3d_2$ då $d_1 + d_2 \leq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$,
vilket har optimallösning t.ex. $d = (0,0)$ med $z = 0$. Alltså är $x = (5/6, 1/6)$ optimal.
Svar: Ta 5/6 Amarillo och 1/6 Citra.

2c: Lagrangerelaxationen:
$\varphi(u) = \min_{x\in X} x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 - x_2 + u_1(x_1 + x_2 - 1)$
där $X = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 1, 0 \leq x_2 \leq 1\}$.
Eftersom subproblemet är separabelt, kan vi skriva det som
$\varphi(u) = (\min_{0\leq x_1\leq 1}(x_1^2 + (u_1 - 2)x_1)) + (\min_{0\leq x_2\leq 1}(2x_2^2 + (u_1 - 1)x_2)) - u_1$,
vilket betyder att vi kan göra optimering över x_1 och x_2 separat.

För $u = 0$ fås $\varphi(0) = \min_{x\in X} x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 - x_2$, som har optimum för $x_1 = 1$ och $x_2 = 1/4$, vilket ger $\varphi(0) = -9/8 = -1.125$, och en undre gräns på -1.125. Lösningen är inte tillåten.

För $u = 1$ fås $\varphi(1) = \min_{x\in X} x_1^2+2x_2^2-2x_1-x_2+(x_1+x_2-1) = \min_{x\in X} x_1^2+2x_2^2-x_1-1$, som har optimum för $x_1 = 1/2$ och $x_2 = 0$, vilket ger $\varphi(1) = -5/4 = -1.25$, vilket inte ger en förbättrad undre gräns. Lösningen är tillåten, så vi får en övre gräns på $f(x) = -3/4 = -0.75$.

Eftersom $u = 0$ är för litet och $u = 1$ är för stort, bör det bästa värdet på u ligga mellan 0 och 1. De bästa gränserna är en undre på -1.125 och en övre på -0.75.

Uppgift 3

3a: Billigaste väg-problem. Använd Dijkstras metod. Vi får $y_1 = 0$, $p_1 = -$, $y_2 = 4$, $p_2 = 1$, $y_3 = 10$, $p_3 = 2$, $y_4 = 13$, $p_4 = 3$, $y_5 = 13$, $p_5 = 2$, $y_6 = 12$, $p_6 = 1$, $y_7 = 18$, $p_7 = 4$, Uppnystning ger vägen 1 - 2 - 3 - 4 - 7, med kostnad 18.

3b: Vi har $y_3 = 10$ och $y_6 = 12$, så om $c_{36} < 2$ kommer y_6 att sänkas. Det räcker dock inte för att båge (3,6) ska ingå i billigaste väg. Det krävs$c_{36} < 0$ för att billigaste väg ska bli billigare.

Uppgift 4

4a: Ta bort nod 7 och alla bågar genom den, och finn maxflöde från nod 1 till nod 4. Lösningsgång: Sök maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får t.ex. vägen 1-8-6-4, med kapacitet 4. Skicka 4 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (8, 6) blir full.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får nu t.ex. vägen 1-2-5-3-4, med kapacitet 4. Skicka 4 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (1, 2) blir full.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får nu vägen 1-9-6-4, med kapacitet 1. Skicka 1 enhet och ändra tillåtna riktningar. (Båge (6, 4) blir full.)

I nästa iteration kan man i Dijkstras metod bara märka/nå noderna 1, 8, 9 och 6, så minsnittet går mellan dessa noder och de andra, dvs. över bågarna (1, 2) och (6, 4), samt (5, 6) bakåt. Maxflödet är 9.

4b: Öka kapciteten på båge (1, 2) eller (6, 4), eftersom de ingår i minsnittet.

Uppgift 5

Handelsresandeproblem. Billigaste 1-träd ger kostnad 59, vilket är en undre gräns. Tillåten lösning är lite svårare att få. Närmaste granne med start i nod 9 ger turen 9-8-7-5-6-4-3-2-1-9, dvs. 1-9-8-7-5-6-4-3-2-1, med kostnad 62. Vi får övre gräns 62 och undre gräns 59, så vår lösning kan vara 3 enheter sämre än optimum, men inte mer.

Uppgift 6

6a: Vi får målfunktion: max $2x_1 + 3x_2$.

P0: Grafisk lösning ger $x_1 = 5.5$, $x_2 = 0$ och $z = 11$, vilket ger $\bar{z} = 11$.
Förgrena över x_1: P1 = P0 + ($x_1 \leq 5$), P2 = P0 + ($x_1 \geq 6$).
P1: Grafisk lösning: $x_1 = 5$, $x_2 = 2/7 \approx 0.28$, $z \approx 10.85$, vilket ger $\bar{z} = 10$.
Förgrena över x_2: P3 = P1 + ($x_2 \leq 0$), P4 = P1 + ($x_2 \geq 1$).
P3: Grafisk lösning: $x_1 = 5$, $x_2 = 0$, $z = 10$. Heltalig lösning, $\underline{z} = 10$. Kapa.
P4: Kapa, ty $\bar{z} = 10$ och $\underline{z} = 10$.
P2: Saknar tillåten lösning. Kapa.
Trädet avsökt. Svar: Hyr in 5 kranar av sort 1.

6b: I så fall får man: P0: $\bar{z} = 55$. P1: $\bar{z} = 54$. P3: $\underline{z} = 50$.
Nu kan P4 inte kapas, så trädet blir större. Svar: ja.

Uppgift 7

7a: Inför ny nod 7, sänka av styrka 1, samt bågar (1,7) och (2,7), båda med kostnad noll.

7b: Den givna startlösningen är tillåten och ger att basbågarna är (1,2), (2,3), (3,4), (1,6) och (6,5). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 5$, $y_3 = 9$, $y_4 = 13$, $y_5 = 17$, $y_6 = 10$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{13} = -3 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{24} = 0$ (optimalt), $\hat{c}_{35} = -4 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{36} = 2 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{45} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Alla bågar optimala. Lösningen optimal.

7c: Ny reducerad kostnad: $\hat{c}_{36} = c_{36} + y_6 - y_3 = -1 < 0$, ej optimalt. Öka.
Alltså välj x_{36} som inkommande variabel, att öka. Cykeln blir 3-6-1-2-3, och maximal ändring blir 1, pga. båge (1,6), som blir utgående.

Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 5$, $y_3 = 9$, $y_4 = 13$, $y_5 = 16$, $y_6 = 9$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{13} = -3 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{16} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{24} = 0$ (optimalt), $\hat{c}_{35} = -3 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{45} = 2 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Alla bågar optimala. Lösningen optimal.

Uppgift 8

Kinesiska brevbärarproblemet. Noderna 2, 4, 6 och 8 har udda valens. De förbinds billigast med bågarna (2, 5), (4, 5), (6, 9) och (8, 9), så dessa bågar dubbleras (körs mer än en gång) till kostnad av 24. En rundtur blir då t.ex. 1-2-5-2-3-6-9-6-5-8-9-8-7-4-5-4-1 med kostnaden $76 + 24 = 100$.

Uppgift 9

9a: Efter första steget fås $\alpha = (5, 7, 5, 2, 4)$ och $\beta = (0, 1, 0, 0, 0)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 1 och 2 samt kolumn 3 och 4, med minsta ostrukna element 2, vilket gör att vi får $\alpha = (5, 7, 7, 4, 6)$ och $\beta = (0, 1, 0, -2, -2)$. Nu fås t.ex. lösningen $x_{11} = 1$, $x_{22} = 1$, $x_{35} = 1$, $x_{43} = 1$, $x_{54} = 1$, och total kostnad blir 26. Optimal duallösning är ovanstående α och β. Summering av duallösningen ger 26, så starka dualsatsen är uppfylld.

9b: Om alla kostnader i rad 4 ökar med 4, kan en optimal dual lösning fås genom att öka α_4 med 2. För övrigt är resten av duallösningen oförändrad. Eftersom precis samma reducerade kostnader fås, ändras inte den primala lösningen. (Man kan också motivera detta med att alla tillåtna lösningar blir precis 2 dyrare.)