Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

TAOP88
Lösning till tentamen
2019-10-23

Lösningar

Uppgift 1

1a: Inför slackvariabler x_5, x_6 och x_7. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	-6	-5	-4	-3	0	0	0	0
x_5	0	1	2	0	0	1	0	0	10
x_6	0	1	2	0	2	0	1	0	12
x_7	0	2	0	4	2	0	0	1	16

Först fås x_1 som inkommande variabel och x_7 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	0	-5	8	3	0	0	3	48
x_5	0	0	2	-2	-1	1	0	-0.5	2
x_6	0	0	2	-2	1	0	1	-0.5	4
x_1	0	1	0	2	1	0	0	0.5	8

Därefter fås x_2 som inkommande variabel och x_5 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	0	0	3	0.5	2.5	0	1.75	53
x_2	0	0	1	-1	-0.5	0.5	0	-0.25	1
x_6	0	0	0	0	2	-1	1	0	2
x_1	0	1	0	2	1	0	0	0.5	8

Nu är tablån optimal. Optimallösningen blir $x_1 = 8$, $x_2 = 1$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, (samt $x_5 = 0$, $x_6 = 2$, $x_7 = 0$) med $z = 53$. Bivillkor 1 och 3 är aktiva, så det blir inga stora eller små över. Det blir dock 20 mellanstora över (ty $x_6 = 2$). Duallösningen läses av i målfunktionsraden under slackvariablerna: $y_1 = 2.5$, $y_2 = 0$, $y_3 = 1.75$, $v = 53$.
Svar i ord: Gör 8 påsar av sort 1 och 1 påse av sort2.

1b: Skuggpriser fås av duallösningen, och $y_1 = 2.5$ är störst, så man tjänar mest på att öka högerledet till bivillkor 1, dvs. köpa stora skruvar.

1c: Ny variabel x_8. Reducerad kostnad: $\hat{c}_8 = c_8 - a_8^T y = c_8 - (y_1 + y_2 + y_3) = c_8 - 4.25 > 0$ om $c_8 > 4.25$. Vinsten behöver vara större än 4.25. Eftersom $y_2 = 0$ spelar värdet på a_{82} ingen roll.

1d: Dualt bivillkor: $y_1 + y_2 + y_3 \geq c_8$. Sätt in $y = (2.5, 0, 1.75)$, vilket ger $4.25 \geq c_8$. Så duallösningen är tillåten om $c_8 \leq 4.25$. Eftersom vi vill ha x_8 som inkommande variabel, ska primala lösningen inte vara optimal, dvs. duala lösningen ska inte vara tillåten, så vi kräver $c_8 > 4.25$.

Uppgift 2

Målfunktionen är summan av konvexa funktioner (linjära funktioner och kvadrater) och bivillkoren linjära, så problemet är konvext.

2a: Skriv problemet på standardform.
$g_1(x) = x_1 - 1 \leq 0$, $g_2(x) = x_1 + 2x_2 - 4 \leq 0$, $g_3(x) = -x_1 \leq 0$, $g_4(x) = -x_2 \leq 0$,
$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 8x_1 - 12 \\ 4x_2 - 8 \end{pmatrix}$, $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$,
$\nabla g_4(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Man kan se grafiskt att extrempunkterna är (0, 0), (1, 0), (1, 3/2) och (0, 2).

För punkt (1, 0):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 2 och 3 är inte aktiva, så $u_2 = 0$ och $u_3 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Detta ger $u_1 = 4$ och $u_4 = -8$, så KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

För punkt (0, 2):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 1 och 4 är inte aktiva, så $u_1 = 0$ och $u_4 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -12 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Detta ger $u_2 = 0$ och $u_3 = -12$, så KKT4 är inte uppfyllda. Punkten är inte en KKT-punkt.

För punkt (1, 3/2):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 3 och 4 är inte aktiva, så $u_3 = 0$ och $u_4 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Detta ger $u_1 = 3$ och $u_2 = 1$, så KKT4 är uppfyllt. Punkten är en KKT-punkt, och optimal, eftersom problemet är konvext.

2b: I startpunkten är bivillkor 3 och 4 aktiva. Första LP-problemet blir
min $z = -12d_1 - 8d_2$ då $d_1 \geq 0$, $d_2 \geq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$,
vilket har optimallösning $d = (1, 1)$ med $z = -20$. Sätt $x^{(2)} = (t, t)$. Maximal steglängd blir 1. Linjesökning ger $t = 5/3$, så vi får $x^{(2)} = (1, 1)$.

Nu är bivillkor 1 aktivt. LP-problemet blir
min $z = -4d_1 - 4d_2$ då $d_1 \leq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$,
vilket har optimallösning $d = (0, 1)$ med $z = -4$. Sätt $x^{(3)} = (1, 1 + t)$. Maximal steglängd blir 1/2. Linjesökning ger $t = 1$, så vi får $x^{(3)} = (1, 3/2)$.

Nu är bivillkor 1 och 2 aktiva. LP-problemet blir
min $z = -4d_1 - 2d_2$ då $d_1 \leq 0$, $d_1 + 2d_2 \leq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$,

vilket har optimallösning $d = (0, 0)$ med $z = 0$. Alltså är $x = (1, 3/2)$ optimal.

2c: Lagrangerelaxationen:
$\varphi(u) = \min_{x \in X} 4x_1^2 + 2x_2^2 - 12x_1 - 8x_2 + u(x_1 + 2x_2 - 4)$
där $X = \{(x_1, x_2) : 0 \leq x_1 \leq 1, x_2 \geq 0\}$.
Eftersom subproblemet är separabelt, kan vi skriva det som
$\varphi(u) = (\min_{0 \leq x_1 \leq 1} (4x_1^2 + (u - 12)x_1)) + (\min_{x_2 \geq 0} (2x_2^2 + (2u - 8)x_2)) - 4u,$
vilket betyder att vi kan göra optimering över x_1 och x_2 separat.

För $u = 0$ fås optimum för $x_1 = 1$ och $x_2 = 2$, vilket ger $\varphi(0) = -16$, och en undre gräns på -16. Lösningen är inte tillåten.

För $u = 1$ fås optimum för $x_1 = 1$ och $x_2 = 3/2$, vilket ger $\varphi(1) = -15.5$, och en undre gräns på -15.5. Lösningen är tillåten, och bivillkoret är uppfyllt med likhet, så vi får en övre gräns på $f(x) = -15.5$.

Det betder att vi har funnit optimum, $x_1 = 1$ och $x_2 = 3/2$, med övre och undre gräns lika med -15.5, samt att $u = 1$ är optimalt.

Uppgift 3

3a: Billigaste väg-problem. Använd Dijkstras metod. Vi får $y_1 = 0$, $p_1 = -$, $y_2 = 5$, $p_2 = 1$, $y_3 = 5$, $p_3 = 1$, $y_4 = 8$, $p_4 = 1$, $y_5 = 11$, $p_5 = 3$, $y_6 = 9$, $p_6 = 2$, $y_7 = 12$, $p_7 = 2$, $y_8 = 14$, $p_8 = 6$, $y_9 = 16$, $p_9 = 5$ (eller $p_9 = 6$). Uppnystning ger vägen 1 - 3 - 5 - 9 (eller 1 - 2 - 6 - 9), med kostnad 16.

3b: Använd nodmärkningarna i uppgift a. Uppnystning från nod 8 ger vägen 1 - 2 - 6 - 8, med kostnad 14.

Uppgift 4

Finn maxflöde från nod 1 till nod 4. Lösningsgång: Sök maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 1-2-6-7-4, med kapacitet 5. Skicka 5 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (6, 7) blir full.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får nu vägen 1-5-6-3-4, med kapacitet 3. Skicka 3 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (6, 3) blir full.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får nu vägen 1-2-3-4, med kapacitet 3. Skicka 3 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (2, 3) blir full.)

I nästa iteration kan man i Dijkstras metod bara märka/nå noderna 1, 2, 5 och 6, så minsnittet går mellan dessa noder och de andra, dvs. över bågarna (2, 3), (6, 3) och (6, 7). Maxflödet är 11.

Uppgift 5

5a: Vi får målfunktion: max $x_1 + 2x_2$.

P0: Grafisk lösning ger $x_1 = 0$, $x_2 = 2.5$ och $z = 5$, vilket ger $\bar{z} = 5$.
Förgrena över x_2: P1 = P0 + ($x_2 \leq 2$), P2 = P0 + ($x_2 \geq 3$).
P1: Grafisk lösning: $x_1 = 2/3$, $x_2 = 2$, $z = 14/3 \approx 4.67$, vilket ger $\bar{z} = 4$.
Förgrena över x_1: P3 = P1 + ($x_1 \leq 0$), P4 = P1 + ($x_1 \geq 1$).
P3: Grafisk lösning: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $z = 4$. Heltalig lösning, $\underline{z} = 4$. Kapa.

P4: Kapa, ty $\bar{z} = 4$ och $\underline{z} = 4$.
P2: Saknar tillåten lösning. Kapa.
Trädet avsökt. Svar: Installera 2 apparater av sort 2. Målfunktionsvärde 4 (8).

(Om man inte dividerar målfunktionen med 2, kan man inte kapa P4.)

5b: Finn vilken bättre heltalspunkt som först blir tillåten när högerledet ökas, dvs. bivillkoren parallellflyttas utåt. Numeriskt kan man kolla relevanta punker på följande sätt: Punkt (0, 2), $z = 4$, vänsterled=16, gamla optimum.
Punkt (2, 1), $z = 4$, vänsterled=20, precis tillåten, men inte bättre.
Punkt (1, 2), $z = 5$, vänsterled=22, bättre.
Punkt (0, 3), $z = 6$, vänsterled=24, bättre.
Slutsats: Första bättre punkten är (1, 2) blir tillåten vid högerledet/budgeten 22.

Uppgift 6

6a: Inför ny nod 7, sänka av styrka 1, samt bågar (4,7) och (5,7), båda med kostnad noll. (I startlösningen är $x_{47} = 1$.)

6b: Den givna startlösningen är tillåten och ger att basbågarna är (5,3), (4,3), (5,6), (6,1) och (6,2) (samt (4,7)). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = -3$, $y_3 = -8$, $y_4 = -12$, $y_5 = -11$, $y_6 = -7$, (och $y_7 = -12$) och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{21} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{31} = -4 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{63} = 4 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{54} = 5 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), (samt $\hat{c}_{57} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$)). Alla bågar optimala. Lösningen optimal.

6c: Nya reducerade kostnader: $\hat{c}_{54} = 2 + y_5 - y_4 = 3 > 0$, fortfarande optimalt.
$\hat{c}_{21} = 2 + y_2 - y_1 = -1 < 0$, ej optimalt. Öka.
Alltså välj x_{21} som inkommande variabel, att öka. Cykeln blir 2-1-6-2, och maximal ändring blir 1, pga. båge (6,1), som blir utgående.

Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = -2$, $y_3 = -7$, $y_4 = -11$, $y_5 = -10$, $y_6 = -6$, (och $y_7 = -11$) och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{61} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{31} = -3 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{63} = 4 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{54} = 3 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), (samt $\hat{c}_{57} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$)). Alla bågar optimala. Lösningen optimal.

Uppgift 7

Kinesiska brevbärarproblemet. Noderna 1 och 6 har udda valens. De förbinds billigast med bågarna (1, 8) och (8, 6), så dessa bågar dubbleras (körs mer än en gång) till kostnad av 10. En rundtur blir då t.ex. 1-8-6-8-1-3-6-5-3-4-5-7-4-2-1 (eller 5-3-4-5-7-4-2-1-8-6-8-1-3-6-5), med kostnaden $56 + 10 = 66$.

Uppgift 8

Handelsresandeproblem. Billigaste 1-träd ger kostnad 40, vilket är en undre gräns. Tillåten lösning med närmaste granne-heuristiken med start i nod 1 ger turen 1-8-6-7-5-3-4-2-1 (eller 8-6-7-5-3-4-2-1-8) med kostnad 44. Vi får övre gräns 44 och undre gräns 40, så vår lösning kan vara 4 enheter sämre än optimum, men inte mer.

Uppgift 9

9a: Efter första steget fås $\alpha = (5, 6, 7, 4, 5)$ och $\beta = (0, 0, 0, 2, 1)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 3 och 4 samt kolumn 1 och 3, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (6, 7, 7, 4, 6)$ och $\beta = (-1, 0, -1, 2, 1)$. Nu fås t.ex. lösningen $x_{13} = 1$, $x_{21} = 1$, $x_{35} = 1$, $x_{44} = 1$, $x_{52} = 1$, och total kostnad blir 31. Optimal duallösning är ovanstående α och β. Summering av duallösningen ger 31, så starka dualsatsen är uppfylld.

9b: Om alla kostnader i kolumn 5 ökar med 3, kan en optimal dual lösning fås genom att öka β_5 med 3. För övrigt är resten av duallösningen oförändrad. Eftersom precis samma reducerade kostnader fås, ändras inte den primala lösningen. (Man kan också motivera detta med att alla tillåtna lösningar blir precis 3 dyrare.)