Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

TAOP88
Lösning till tentamen
2020-01-07

Lösningar

Uppgift 1

1a: Inför slackvariabler x_5, x_6 och x_7. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	-4	-5	-2	-3	0	0	0	0
x_5	0	10	10	10	10	1	0	0	120
x_6	0	0	15	15	10	0	1	0	90
x_7	0	20	0	20	0	0	0	1	80

Först fås x_2 som inkommande variabel och x_6 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	-4	0	3	1/3	0	1/3	0	30
x_5	0	10	0	0	10/3	1	-2/3	0	60
x_2	0	0	1	1	2/3	0	1/15	0	6
x_7	0	20	0	20	0	0	0	1	80

Därefter fås x_1 som inkommande variabel och x_7 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	0	0	7	1/3	0	1/3	1/5	46
x_5	0	0	0	-10	10/3	1	-2/3	-1/2	20
x_2	0	0	1	1	2/3	0	1/15	0	6
x_1	0	1	0	1	0	0	0	1/20	4

Nu är tablån optimal. Optimallösningen blir $x_1 = 4$, $x_2 = 6$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, (samt $x_5 = 20$, $x_6 = 0$, $x_7 = 0$) med $z = 46$. Bivillkor 2 och 3 är aktiva, så det blir inga svarta eller vita över, men det blir 20 000 blå över (ty $x_5 = 20$). Duallösningen läses av i målfunktionsraden under slackvariablerna: $y_1 = 0$, $y_2 = 1/3$, $y_3 = 1/5$, $v = 46$. Svar i ord: Gör 4000 påsar av sort 1 och 6000 påsar av sort 2.

1b: Skuggpriser fås av duallösningen, så $y_1 = 0$ är minst och $y_2 = 1/3$ är störst, så man förlorar minst (inget) på att minska högerledet till bivillkor 1, dvs. ge bort blå. (Man skulle förlora mest på att ge bort svarta.)

1c: Ny variabel x_8. Reducerad kostnad: $\hat{c}_8 = c_8 - a_8^T y = c_8 - (20y_2 + 20y_3) = c_8 - (20/3 + 20/5) = c_8 - (20/3 + 4) = c_8 - (20/3 + 12/3) = c_8 - 32/3 > 0$ om $c_8 > 32/3 \approx 10.667$. Vinsten behöver vara större än 10.667.

1d: Dualt bivillkor: $20y_2 + 20y_3 \geq c_8$. Sätt in $y = (0, 1/3, 1/5)$, vilket ger $32/3 \geq c_8$. Duallösningen är alltså tillåten om $c_8 \leq 32/3$. Eftersom vi vill ha x_8 som inkommande variabel, ska primala lösningen inte vara optimal, dvs. duala lösningen ska inte vara tillåten, så vi kräver $c_8 > 32/3$.

Uppgift 2

Målfunktionen är summan av konvexa funktioner (linjära funktioner och kvadrater) och bivillkoren linjära, så problemet är konvext.

2a: Skriv problemet på standardform.
$g_1(x) = x_1 + x_2 - 1 \le 0$, $g_2(x) = -x_1 \le 0$, $g_3(x) = -x_2 \le 0$,
$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 - 4 \\ 8x_2 - 5 \end{pmatrix}$, $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Man kan se grafiskt att extrempunkterna är (0, 0), (1, 0) och (0, 1).

För punkt (0, 0):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 1 är inte aktivt, så $u_1 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -4 \\ -5 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $u_2 = -4$ och $u_3 = -5$, så KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

För punkt (1, 0):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 2 är inte aktivt, så $u_2 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $u_1 = 0$ och $u_3 = -5$, så KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

För punkt (0, 1):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 3 är inte aktivt, så $u_3 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $u_1 = -3$ och $u_2 = -7$, så KKT4 är inte uppfyllda. Punkten är inte en KKT-punkt.

2b: I startpunkten är bivillkor 2 och 3 aktiva. Första LP-problemet blir
$$\min z = -4d_1 - 5d_2 \text{ då } d_1 \ge 0,\ d_2 \ge 0, \text{ samt } -1 \le d \le 1,$$
vilket har optimallösning $d = (1, 1)$ med $z = -9$. Sätt $x^{(2)} = (t, t)$. Maximal steglängd blir 1/2. Linjesökning ger $t = 3/4$, så vi får $x^{(2)} = (1/2, 1/2)$.

Nu är bivillkor 1 aktivt. LP-problemet blir
$$\min z = -2d_1 - d_2 \text{ då } d_1 + d_2 \le 0, \text{ samt } -1 \le d \le 1,$$
vilket har optimallösning $d = (1, -1)$ med $z = -1$. Sätt $x^{(3)} = (1/2 + t, 1/2 - t)$. Maximal steglängd blir 1/2. Linjesökning ger $t = 1/12$, så vi får $x^{(3)} = (7/12, 5/12)$.

Nu är bivillkor 1 aktivt. LP-problemet blir
$$\min z = -5/3d_1 - 5/3d_2 \text{ då } d_1 + d_2 \le 0, \text{ samt } -1 \le d \le 1,$$
vilket har optimallösning $d = (0, 0)$ med $z = 0$. Alltså är $x = (7/12, 5/12)$ optimal.

2c: Lagrangerelaxationen:
$\varphi(u) = \min_{x \ge 0} = 2x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1 - 5x_2 + u(x_1 + x_2 - 1)$.

Eftersom subproblemet är separabelt, kan vi skriva det som
$\varphi(u) = (\min_{x_1 \geq 0}(2x_1^2 + (u-4)x_1)) + (\min_{x_2 \geq 0}(4x_2^2 + (u-5)x_2)) - u$,
vilket betyder att vi kan göra optimering över x_1 och x_2 separat.

För $u = 0$ fås optimum för $x_1 = 1$ och $x_2 = 5/8$, vilket ger $\varphi(0) = -57/16 = -3.5625$, och en undre gräns på -3.5625. Lösningen är inte tillåten.

För $u = 1$ fås optimum för $x_1 = 3/4$ och $x_2 = 1/2$, vilket ger $\varphi(1) = -25/8 = -3.125$, och en undre gräns på -3.125. Lösningen är inte tillåten.

För $u = 2$ fås optimum för $x_1 = 1/2$ och $x_2 = 3/8$, vilket ger $\varphi(2) = -49/16 = -3.0625$, och en undre gräns på -3.0625. Lösningen är tillåten, så vi får en övre gräns på $f(x) = -45/16 = -2.8125$.

Vi har nu övre gräns på -2.8125 och en undre gräns på -3.0625. Optimalt u ligger mellan 1 och 2.

2d: Minimering av Lagrangefunktionen ger $x_1 = (4-u)/4)$ om $u \leq 4$, och $x_1 = 0$ om $u > 4$, samt $x_2 = (5-u)/8$ om $u \leq 5$, och $x_2 = 0$ om $u > 5$. Antag först $u \leq 4$. Vi vill ha $x_1 + x_2 = 1$, vilket ger $(4-u)/4 + (5-u)/8 = 13/8 - 3u/8 = 1$, dvs. $u = 5/3$. (Så $u \leq 4$ stämmer.) Detta ger $x_1 = 7/12$ och $x_2 = 5/12$.

Uppgift 3

3a: Billigaste väg-problem. Använd Dijkstras metod. Vi får $y_1 = 0$, $p_1 = -$, $y_2 = 4$, $p_2 = 1$, $y_3 = 14$, $p_3 = 1$, $y_4 = 12$, $p_4 = 2$, $y_5 = 20$, $p_5 = 4$, $y_6 = 21$, $p_6 = 3$, $y_7 = 29$, $p_7 = 5$, $y_8 = 28$, $p_8 = 6$. Uppnystning ger vägen 1 - 2 - 4 - 5 - 7 med restid 29.

3b: Se nodpriser y i uppgift a. Nod 2 nås efter 4 timmar, nod 4 nås efter 12 timmar, nod 5 nås efter 20 timmar, nod 7 nås efter 29 timmar.

3c: Billigaste väg till nod 8 blir (enligt uppgift a) 1 - 3 - 6 - 8, med kostnad 28. Kostnad för Gel blir då $28 + 2 = 30 > 29$, så detta lönar sig inte för Gel.

Uppgift 4

Finn maxflöde från nod 1 till nod 7. Lösningsgång: Sök maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 1-3-6-7, med kapacitet 5. Skicka 5 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (1, 3) blir full.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får nu vägen 1-2-4-6-7, med kapacitet 4. Skicka 4 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Bågarna (2, 4) och (6, 7) blir fulla.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får nu vägen 1-2-3-5-7, med kapacitet 1. Skicka 1 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (1, 2) blir full.)

I nästa iteration kan man i Dijkstras metod bara märka nod 1, så minsnittet går mellan nod 1 och de andra, dvs. över bågarna (1, 2) och (1, 3). Maxflödet är 10.

Uppgift 5

P0: Grafisk lösning ger $x_1 = 0$, $x_2 = 1.5$ och $z = 10.5$, vilket ger $\bar{z} = 10$.
Förgrena över x_2: P1 = P0 + ($x_2 \leq 1$), P2 = P0 + ($x_2 \geq 2$).
P1: Grafisk lösning: $x_1 = 2/3$, $x_2 = 1$, $z = 31/3 \approx 10.33$, vilket ger $\bar{z} = 10$.

Förgrena över x_1: P3 = P1 + ($x_1 \leq 0$), P4 = P1 + ($x_1 \geq 1$).
P3: Grafisk lösning: $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $z = 7$. Heltalig lösning, $\underline{z} = 7$. Kapa.
P4: Grafisk lösning: $x_1 = 1$, $x_2 = 3/4$, $z = 41/4 = 10.25$, vilket ger $\bar{z} = 10$.
Förgrena över x_2: P5 = P4 + ($x_2 \leq 0$), P6 = P4 + ($x_2 \geq 1$).
P5: Grafisk lösning: $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $z = 10$. Heltalig lösning, $\underline{z} = 10$. Kapa.
P6: Kapa, ty $\bar{z} = 10$ och $\underline{z} = 10$. (Försök inte ens lösa.)
P2: Saknar tillåten lösning. Kapa.
Trädet avsökt. Svar: Köp 2 maskiner av sort 1. Målfunktionsvärde 10.

Uppgift 6

6a: Den givna startlösningen är tillåten och ger att basbågarna är (1,2), (2,3), (3,5), (3,6) och (4,5). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 4$, $y_3 = 16$, $y_4 = 17$, $y_5 = 25$, $y_6 = 23$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{13} = -2 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{24} = -5 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{46} = -1 < 0$ (inte optimalt ty $x = 0$). Vi väljer x_{46} som inkommande variabel, att öka. Cykeln blir 4-6-3-5-4, och maximal ändring blir 1, pga. båge (3,5) och (4,5). Vi väljer (3,5) som utgående.

Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 4$, $y_3 = 16$, $y_4 = 18$, $y_5 = 26$, $y_6 = 23$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{13} = -2 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{24} = -6 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{35} = -1 < 0$ (optimalt ty $x = u$). Alla bågar optimala. Lösningen optimal.

6b: Inför ny nod 7, sänka av styrka 3, samt bågar (1,7) och (2,7), båda med kostnad noll. Öka källstyrkan i nod 1 med 3. I startlösningen sätts $x_{17} = 3$. Det betyder att vi slänger de 3 extra enheterna, dvs. har samma lösning som innan. Man skulle dock kunna öka x_{27} i en cykel som delvis är 2-7-1, vilket betyder att x_{17} minskas.

Vi lägger till (1,7) som basbåge, vilket ger $y_7 = 0$. Ickebasbågen (2,7) får då reducerad kostnad $\hat{c}_{27} = 4 > 0$, vilket är optimalt, ty $x_{27} = 0$, så vi vill inte ändra flödet. Detta bevisar att det inte lönar sig att öka produktionen i nod 1.

Uppgift 7

Kinesiska brevbärarproblemet. Noderna 2, 3, 5 och 6 har udda valens. De förbinds billigast med bågarna (2, 3) och (5, 6), så dessa bågar dubbleras (körs mer än en gång) till kostnad av 15. En rundtur blir då t.ex. 1-2-3-2-4-5-6-5-3-6-4-3-1, med kostnaden $71 + 15 = 86$.

Uppgift 8

Handelsresandeproblem. Billigaste 1-träd ger kostnad 44, vilket är en undre gräns. Det billigaste 1-trädet kan också vara en Hamiltoncykel, dvs. en tillåten lösning till handelseresandeproblemet. (Om man inte fick rätt 1-träd kan man flytta bågar utan att totalkostnaden höjs för att få en cykel.) En tillåten lösning är 1-2-7-4-5-6-8-3-1, med kostnad 44. Vi får övre gräns 44 och undre gräns 44, så vår lösning är optimal.

Uppgift 9

9a: Efter första steget fås $\alpha = (15, 6, 27, 4, 15)$ och $\beta = (0, 0, 0, 2, 1)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 3 och 4 samt kolumn 1 och 3, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (16, 7, 27, 4, 16)$ och $\beta = (-1, 0, -1, 2, 1)$. Nu fås lösningen $x_{13} = 1$, $x_{21} = 1$, $x_{35} = 1$, $x_{44} = 1$, $x_{52} = 1$, och total kostnad blir 71.

Optimal duallösning är ovanstående α och β. Summering av duallösningen ger 71, så starka dualsatsen är uppfylld.