Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

TAOP88
Lösning till tentamen
2020-06-02

Lösningar

Uppgift 1

1a: Inför slackvariabler x_4, x_5 och x_6. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	-4	-6	-3	0	0	0	0
x_4	0	4	2	6	1	0	0	1000
x_5	0	2	1	4	0	1	0	400
x_6	0	0	2	2	0	0	1	600

Först fås x_2 som inkommande variabel och x_6 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	-4	0	3	0	0	3	1800
x_4	0	4	0	4	1	0	-1	400
x_5	0	2	0	3	0	1	-0.5	100
x_2	0	0	1	1	0	0	0.5	300

Därefter fås x_1 som inkommande variabel och x_5 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	0	0	9	0	2	2	2000
x_4	0	0	0	-2	1	-2	0	200
x_1	0	1	0	1.5	0	0.5	-0.25	50
x_2	0	0	1	1	0	0	0.5	300

Nu är tablån optimal. Optimallösningen blir $x_1 = 50$, $x_2 = 300$, $x_3 = 0$, (samt $x_4 = 200$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$) med $z = 2000$. Optimallösningen är unik, eftersom ingen icke-basvariabel har reducerad kostnad noll.

Bivillkor 2 och 3 är aktiva, så det blir inget plast eller tyg över, men lokalerna räcker till oc blir över (ty $x_4 > 0$). Duallösningen läses av i målfunktionsraden under slackvariablerna: $y_1 = 0$, $y_2 = 2$, $y_3 = 2$, $v = 2000$. Skuggpriserna är desamma som duallösningen, och $y_1 = 0$ anger att ytterliagre lokaler har inget värde alls, $y_2 = 2$ anger att ytterligare en enhet plast ökar målfunktionsvärdet med 2, och $y_3 = 2$ anger att ytterligare en enhet tyg ökar målfunktionsvärdet med 2.
Svar i ord: Gör 50 skyddsvisir och 300 andningsmasker, men inga skyddsförkläden.

1b: Ny variabel x_7. Reducerad kostnad: $\hat{c}_7 = c_7 - a_7^T y = c_7 - (3y_1 + 3y_2 + y_3) = c_7 - (0 + 6 + 2) = c_7 - 8 > 0$ om $c_7 > 8$. Vinsten behöver vara större än 8.

1c: Dualt bivillkor: $3y_1 + 2y_2 + y_3 \geq c_7$. Sätt in $y = (0, 2, 2)$, vilket ger $8 \geq c_7$. Duallösningen är alltså tillåten om $c_7 \leq 8$. Eftersom vi vill ha x_7 som inkommande variabel, ska primala lösningen inte vara optimal, dvs. duala lösningen ska inte vara tillåten, så vi kräver $c_7 > 8$.

Uppgift 2

2a: Inför en dummysänka, nod 7, av styrka 4 (som är total källstyrka 15 minus total sänkstyrka 11), och bågar (1,7), (2,7) och (3,7) med kostnad noll. I den givna startlösningen är $x_{17} = 1$, $x_{27} = 0$ och $x_{37} = 3$.

Den givna startlösningen är tillåten och ger att basbågarna är (2,5), (3,4), (3,5), (1,7) och (3,7), samt t.ex. (1,6).

Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = 0$, $y_4 = 6$, $y_5 = 8$, $y_6 = 5$, $y_7 = 0$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{12} = 5 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{14} = -4 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{26} = -1 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{27} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{46} = 6 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{63} = 11 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{65} = 0$ (optimalt oavsett x). Alla optimalitetsvillkor är uppfyllda, så lösningen är optimal.

2b: För den nya bågen fås $\hat{c}_{36} = 3 + 0 - 5 = -2 < 0$, inte optimalt ty $x = 0$. Vi väljer x_{36} som inkommande variabel, att öka. Cykeln blir 3-6-1-7-3, och maximal ändring blir 0, pga. båge (1,6), så vi väljer (1,6) som utgående. Detta förändrar enbart y_6, från 5 till 3. Följande reducerade kostnader ändras: $\hat{c}_{16} = 2 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{26} = 1 > 0$ (ej optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{46} = 8 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{63} = 9 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{65} = -2 < 0$ (optimalt ty $x = u$).

Vi får x_{26} som inkommande variabel, att minska. Cykeln blir 6-2-5-3-6, och maximal ändring blir 1, pga. båge (3,5). Vi får (3,5) som utgående. Detta förändrar följande nodpriser: $y_2 = 0$ och $y_5 = 7$. Vi får följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{12} = 6 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{14} = -4 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{16} = 2 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{27} = 0$ (optimalt), $\hat{c}_{46} = 8 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{63} = 9 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{65} = -1 < 0$ (optimalt ty $x = u$). Alla bågar optimala. Lösningen optimal.

Ändring i totalkostnad: Första iterationen gjorde flödesändring noll, vilket ger kostnadsändring noll. I andra iterationen gjordes flödesändringen 1, och eftersom reducerad kostnad för inkommande variabel var 1, och flödet minskades, så blir kostnadsändringen -1. Totalkostnaden minskades alltså med 1.

2c: Finn maxflöde från nod 1 till nod 5 (i nätverket utan nod 7). Starta med flöde noll. Lösningsgång: Sök maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 1-2-5, med kapacitet 5. Skicka 5 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båda bågarna blir fulla.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får nu vägen 1-6-5, med kapacitet 4. Skicka 4 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båda bågarna blir fulla.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får nu vägen 1-4-6-3-5, med kapacitet 2. Skicka 2 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (1, 4) blir full.)

I nästa iteration kan man i Dijkstras metod bara märka nod 1, så minsnittet går mellan nod 1 och de andra, dvs. över bågarna (1, 2), (1, 4) och (1, 6). Det betyder att om man vill öka maxflödet, måste kapaciteten på någon av dessa bågar ökas. Det betyder också att den nya bågen (3,6) inte skulle öka maxflödet. Maxflödet är 11.

Uppgift 3

Målfunktionen är summan av kvadrater och linjära delar, så den är konvex, och eftersom bivillkoren är linjära, är problemet konvext.

3a: Extrempunkterna är (0,0,0), (1,0,0), (0,1,0) och (0,0,1). Origo kan tas bort direkt, för det innebär ju inga ämnen alls. I varje annan punkt av dessa ingår (högst) ett ämne, så det är tveksamt att kalla detta "blandning". Egenskaperna hos enskilda ämnen är kända sedan tidigare, så här är man intresserad av en blandning med minst två ämnen.

Skriv problemet på standardform för att applicera KKT-villkoren.
$g_1(x) = x_1 + x_2 + x_3 - 1 \le 0$, $g_2(x) = -x_1 \le 0$, $g_3(x) = -x_2 \le 0$, $g_4(x) = -x_3 \le 0$,
$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 16x_1 - 8 \\ 8x_2 - 10 \\ 16x_3 - 12 \end{pmatrix}$, $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,
$\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_4(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

För punkt (0, 0, 0):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 1 är inte aktivt, så $u_1 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -8 \\ -10 \\ -12 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $u_1 = -8$, $u_3 = -10$ och $u_4 = -12$, så KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

För punkt (1, 0, 0):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 2 är inte aktivt, så $u_2 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} 8 \\ -10 \\ -12 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $u_1 = -8$, $u_3 = -18$ och $u_4 = -20$, så KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

För punkt (0, 1, 0):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 3 är inte aktivt, så $u_3 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -8 \\ -2 \\ -12 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $u_1 = 2$, $u_2 = -6$ och $u_4 = -10$, så KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

För punkt (0, 0, 1):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 4 är inte aktivt, så $u_4 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -8 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $u_1 = -4$, $u_2 = -12$ och $u_3 = -14$, så KKT4 är inte uppfyllda. Punkten är inte en KKT-punkt.

3b: Lagrangerelaxationen:
$\varphi(u) = \min_{x \geq 0} 8x_1^2 + 4x_2^2 + 8x_3^2 - 8x_1 - 10x_2 - 12x_3 + u_1(x_1 + x_2 + x_3 - 1)$.
Låt oss tillfälligt ignorera bivillkoren $x \geq 0$, och finna minimum genom att sätta $\nabla_x L(x, u) = 0$. Vi får $\begin{pmatrix} 16x_1 - 8 + u_1 \\ 8x_2 - 10 + u_1 \\ 16x_3 - 12 + u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,
vilket ger $x_1 = (8 - u_1)/16$, $x_2 = (10 - u_1)/8$ och $x_3 = (12 - u_1)/16$. Detta gäller under förutsättning att x inte blir negativt, så lösningen blir
$x_1 = \max(0, (8 - u_1)/16)$, $x_2 = \max(0, (10 - u_1)/8)$ och $x_3 = \max(0, (12 - u_1)/16)$.

För $u = 0$ får vi $x_1 = 1/2$, $x_2 = 5/4$, $x_3 = 3/4$, vilket ger $\varphi(0) = -51/4 = -12.75$, och en undre gräns på -12.75. $x_1 + x_2 + x_3 = 5/2 > 1$, så lösningen är inte tillåten.

För $u = 5$ får vi $x_1 = 3/16$, $x_2 = 5/8$, $x_3 = 7/16$, vilket ger $\varphi(5) = -67/8 = -8.375$, och en undre gräns på -8.375. $x_1 + x_2 + x_3 = 5/4 > 1$, så lösningen är inte tillåten.

För $u = 6$ får vi $x_1 = 1/8$, $x_2 = 1/2$, $x_3 = 3/8$, med målfunktionsvärde $\varphi(6) = -8.25$, vilket ger en undre gräns på -8.25. $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, så lösningen är tillåten. Vi får en övre gräns på -8.25.

Det optimala värdet på u_1 är 6, eftersom övre gräns är lika med undre gräns, och bivillkoret blev precis uppfyllt. Lösningen $x_1 = 1/8$, $x_2 = 1/2$ och $x_3 = 3/8$ är optimal.

3c: Genom att sätta $x_3 = 3x_1$ i målfunktionen, fås $f(x) = 80x_1^2 + 4x_2^2 - 44x_1 - 10x_2$ och bivillkoren blir $4x_1 + x_2 \leq 1$, $x_1 \geq 0$ och $x_2 \geq 0$.

I startpunkten (0, 1) är bivillkor 1 och 2 aktiva. Första LP-problemet blir
$\min z = -44d_1 - 2d_2$ då $4d_1 + d2 \leq 0$, $d_1 \geq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$,
vilket har optimallösning $d = (0.25, -1)$ med $z = -9$. Sätt $x^{(2)} = (0.25t, 1 - t)$. Maximal steglängd blir 1. Linjesökning ger $t = 0.5$, så vi får $x^{(2)} = (0.125, 0.5)$.

Nu är bara bivillkor 1 aktivt. LP-problemet blir
$\min z = -24d_1 - 6d_2$ då $4d_1 + d_2 \leq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$,
vilket t.ex. har optimallösning $d = (0, 0)$ med $z = 0$. Alltså är $x = (0.125, 0.5)$ optimal.

Uppgift 4

4a: Billigaste väg-problem. Använd Dijkstras metod. Vi får $y_1 = 0$, $p_1 = -$, $y_2 = 1$, $p_2 = 1$, $y_3 = 2$, $p_3 = 2$, $y_4 = 2$, $p_4 = 1$, $y_5 = 3$, $p_5 = 3$, $y_6 = 5$, $p_6 = 3$, $y_7 = 4$, $p_7 = 5$. Åk till nod 7, ty $y_7 < y_6$. Uppnystning ger vägen 1 - 2 - 3 - 5 - 7 med restid 4 timmar.

4b: Se nodpriser y i uppgift a. Nod 2 nås efter 1 timme, nod 3 nås efter 2 timmar, nod 5 nås efter 3 timmar, nod 7 nås efter 4 timmar.

Uppgift 5

5a: P0: Grafisk lösning ger $x_1 = 30/11 \approx 2.72$, $x_2 = 35/22 \approx 1.59$ och $z = 290/11 \approx 26.36$, vilket ger $\bar{z} = 26$.
Förgrena över x_1: P1 = P0 + ($x_1 \leq 2$), P2 = P0 + ($x_1 \geq 3$).

P2: Grafisk lösning: $x_1 = 3$, $x_2 = 1.25$, $z = 25$, vilket ger $\bar{z} = 25$.
Förgrena över x_2: P3 = P2 + ($x_2 \leq 1$), P4 = P2 + ($x_2 \geq 2$).

P4: Saknar tillåten lösning. Kapa.
P3: Grafisk lösning: $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $z = 23$. Heltalig lösning, $\underline{z} = 23$. Kapa.

P1: Grafisk lösning: $x_1 = 2$, $x_2 = 11/6 \approx 1.83$, $z = 74/3 \approx 24.67$, vilket ger $\bar{z} = 22$. Förgrena över x_2: P5 = P1 + ($x_2 \leq 1$), P6 = P1 + ($x_2 \geq 2$).

P6: Grafisk lösning: $x_1 = 1.5$, $x_2 = 2$, $z = 23.5$, vilket ger $\bar{z} = 23$. Kapa, ty $\underline{z} = 23$.
P5: Grafisk lösning: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $z = 18$, vilket ger $\bar{z} = 18$. Kapa, ty $\underline{z} = 23$.

Trädet avsökt. Bästa lösning är $x_1 = 3$, $x_2 = 1$ med $z = 23$.
Svar: Gör om tre salar av typ 1 och en 1 typ 2. Det ger 23 intensivvårdsplatser.

5b: Tillåtna värden för x_1: $\{1, 2, 3\}$. Tillåtna värden för x_2: $\{1, 2, 3\}$.
Angiven lösning: (1,2): Tillåten, målfunktionsvärde $\underline{z} = 21$. Bivillkor för bättre lösning: $c^T x \geq \underline{z} + 1$, vilket blir $5x_1 + 8x_2 \geq 22$. (0)
Förgrena över x_1: P1: $x_1 \leq 1$, P2: $x_1 \geq 2$.

P1: $x_1 = 1$: Bivillkor 0: $5 + 8x_2 \geq 19 \Rightarrow 8x_2 \geq 14 \Rightarrow x_2 \geq 2$.
Tillåtna värden för x_1: $\{1\}$. Tillåtna värden för x_2: $\{2, 3\}$.
Bivillkor 1: $5 + 4x_2 \leq 20$ ger inget.
Bivillkor 2: $2 + 6x_2 \leq 15 \Rightarrow 6x_2 \leq 13 \Rightarrow x_2 \leq 2$.
Tillåtna värden för x_1: $\{1\}$. Tillåtna värden för x_2: $\{2\}$. Lösningen fixerad.
Bivillkor 3: Ok.
Bivillkor 0: $5 + 16 = 21 \not\geq 22$. Tillåten lösning saknas. Kapa.

P2: $x_1 \geq 2$. Bivillkor 0: Ok.
Bivillkor 1: $10 + 4x_2 \leq 5x_1 + 4x_2 \leq 20 \Rightarrow 4x_2 \leq 10 \Rightarrow x_2 \leq 2$.
Tillåtna värden för x_1: $\{2, 3\}$. Tillåtna värden för x_2: $\{1, 2\}$.
Bivillkor 2: $4 + 6x_2 \leq 2x_1 + 6x_2 \leq 15 \Rightarrow 6x_2 \leq 11 \Rightarrow x_2 \leq 1$.
Tillåtna värden för x_1: $\{2, 3\}$. Tillåtna värden för x_2: $\{1\}$.
Bivillkor 3: Ok.
Bivillkor 0: $5x_1 + 8 \geq 22 \Rightarrow 5x_1 \geq 14 \Rightarrow x_1 \geq 3$.
Tillåtna värden för x_1: $\{3\}$. Tillåtna värden för x_2: $\{1\}$. Lösningen fixerad.
Bivillkor 1: Ok.
Bivillkor 2: Ok.
Bivillkor 3: Ok.
Lösningen tillåten. Uppdatera bästa möjliga lösning: (3,1) med $z = 23$. Kapa. Trädet avsökt. Problemet löst.

Uppgift 6

Kinesiska brevbärarproblemet. Noderna 2 och 3 har udda valens. De förbinds billigast med bågarna (1, 2) och (1, 5), så dessa bågar dubbleras (körs mer än en gång) till kostnad av 11/2=5.5. En rundtur blir då t.ex. 1-2-7-8-4-5-6-3-4-2-1-3-1, med kostnaden $67 + 5.5 = 72.5$. Korsningarna 5, 6, 7, 8 passeras en gång, korsningarna 2, 3, 4 passeras två gånger, korsning 1 passeras en gång, förutom start och slut.

Uppgift 7

7a: Handelsresandeproblem. Billigaste 1-träd ger kostnad 64, vilket är en undre gräns. Med heuristik kan man antingen få turen 1-2-8-7-5-6-3-4-1, med kostnad 67, eller 1-2-3-6-8-7-5-4-1, med samma kostnad. Vi får övre gräns 67 och undre gräns 64, så vår lösning är högst 3 enheter för dyr.

7b: Nod 3 har för hög valens i 1-trädet, så vi kan lägga till bivillkoret
$x_{23} + x_{34} + x_{36} + x_{38} \leq 2$.

Uppgift 8

8a: Efter första steget fås $\alpha = (7, 6, 7, 4, 5)$ och $\beta = (0, 0, 0, 2, 0)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 1 och 3 samt kolumn 1 och 3, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (7, 7, 7, 5, 6)$ och $\beta = (-1, 0, -1, 2, 0)$. Nu fås lösningen $x_{15} = 1$, $x_{21} = 1$, $x_{32} = 1$, $x_{43} = 1$, $x_{54} = 1$, och total kostnad blir 32. Optimal duallösning är ovanstående α och β. Summering av duallösningen ger 32, så starka dualsatsen är uppfylld.

8b: I den sista matrisen med reducerade kostnader är hela rad 5 noll, medan det endast finns en nolla i rad 1. Det betyder att det bara finns en möjligt plats för person 1, medan person 5 kan placeras vid vilken plats som helst. (Dock kan ju andra personers begränsningar ge begräsningar för person 5.) Vi drar slutsatsen att person 5 är mer flexibel än person 1.