Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

TAOP88
Lösning till tentamen
2020-08-28

Lösningar

Uppgift 1

1a: Inför slackvariabler x_5, x_6 och x_7. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	-4	-2	-3	-2	0	0	0	0
x_5	0	1	1	1	1	1	0	0	100
x_6	0	1	1	-1	0	0	1	0	20
x_7	0	0	1	1	-1	0	0	1	30

Först fås x_1 som inkommande variabel och x_6 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	0	2	-7	-2	0	4	0	80
x_5	0	0	0	2	1	1	-1	0	80
x_1	0	1	1	-1	0	0	1	0	20
x_7	0	0	1	1	-1	0	0	1	30

Därefter fås x_3 som inkommande variabel och x_7 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	0	9	0	-9	0	4	7	290
x_5	0	0	-2	0	3	1	-1	-2	20
x_1	0	1	2	0	-1	0	1	1	50
x_3	0	0	1	1	-1	0	0	1	30

Nu blir x_4 inkommande variabel och x_5 utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	0	3	0	0	3	1	1	350
x_4	0	0	-2/3	0	1	1/3	-1/3	-2/3	$20/3 \approx 6.667$
x_1	0	1	4/3	0	0	1/3	2/3	1/3	$170/3 \approx 56.667$
x_3	0	0	1/3	1	0	1/3	-1/3	1/3	$110/3 \approx 36.667$

Nu är tablån optimal. Optimallösningen blir $x_1 = 56.667$, $x_2 = 0$, $x_3 = 36.667$, $x_4 = 6.667$, (samt $x_5 = 0$, $x_6 = 0$, $x_7 = 0$) med $z = 350$. Optimallösningen är unik, eftersom ingen icke-basvariabel har reducerad kostnad noll.

Alla bivillkor är aktiva. Duallösningen läses av i målfunktionsraden under slackvariablerna: $y_1 = 3$, $y_2 = 1$, $y_3 = 1$, $v = 350$.

Skuggpriserna är desamma som duallösningen, och anger hur mycket målfunktionsvärdet skulle öka om motsvarande högerled ökar med en enhet. (Eftersom y_1 är störst, skulle man tjäna mest på att öka högerledet i bivillkor 1, dvs totalsumman.)

Svar i ord: Satsa 56.67 mkr på bidrag 1: Möjlighet att skjuta upp betalning av skatt och avgifter, inget på bidrag 2: Slopat krav på läkarintyg under de första 14 sjukdagarna, 36.67 mkr på bidrag 3: Stöd vid minskad omsättning, och 6.67 mkr på bidrag 4: Slopad karens.

1b: Ny variabel x_8. Reducerad kostnad: $\hat{c}_8 = c_8 - a_8^T y = 2 - (y_1 + y_2 - y_3) = 2 - (3 + 1 - 1) = -1 < 0$. Nej, avdela inga pengar till den bidragstypen.

Uppgift 2

2a: Inför en dummysänka, nod 7, av styrka 2 (som är total källstyrka 7 minus total sänkstyrka 5), och bågar (1,7), (2,7) och (4,7) med kostnad noll. I den givna startlösningen är $x_{17} = 2$, $x_{27} = 0$ och $x_{47} = 0$.

Den givna startlösningen är tillåten och ger att basbågarna är (1,7), (2,6), (4,6), (6,3), (6,5), samt t.ex. (1,2).

Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 5$, $y_3 = 20$, $y_4 = 5$, $y_5 = 16$, $y_6 = 11$, $y_7 = 0$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{14} = 0$ (optimalt), $\hat{c}_{16} = -2 < 0$ (inte optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{25} = -3 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{35} = 11 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{43} = -5 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{27} = 5 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{47} = 5 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Lösningen ej optimal. Öka x_{16}. Cykeln blir 1-6-2-1, och maximal ändring blir 0, pga. båge (1,2), så vi väljer (1,2) som utgående.

Nu blir nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 3$, $y_3 = 18$, $y_4 = 3$, $y_5 = 14$, $y_6 = 9$, $y_7 = 0$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{12} = 2 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{14} = 2 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{25} = -3 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{35} = 11 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{43} = -5 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{27} = 3 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{47} = 3 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Alla optimalitetsvillkor är uppfyllda, så lösningen är optimal. Vi har inte ändrat något flöde, så flödet var optimalt från början.

2b: För den nya bågen fås $\hat{c}_{15} = 10 + 0 - 14 = -4 < 0$, inte optimalt ty $x = 0$. Vi väljer x_{15} som inkommande variabel, att öka. Cykeln blir 1-5-6-1, och maximal ändring blir 0, pga. båge (1,6), så vi väljer (1,6) som utgående.

Nu blir nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = -1$, $y_3 = 14$, $y_4 = -1$, $y_5 = 10$, $y_6 = 5$, $y_7 = 0$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{12} = 6 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{14} = 6 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{16} = 4 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{25} = -3 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{35} = 11 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{43} = -5 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{27} = -1 < 0$ (ej optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{47} = -1 < 0$ (ej optimalt ty $x = 0$).

Vi väljer x_{27} som inkommande, att öka. Cykeln blir 2-7-1-5-6-2, och ändringen blir 1, bl.a. pga. båge (1,5), som vi väljer som utgående.

Nu blir nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 15$, $y_4 = 0$, $y_5 = 11$, $y_6 = 6$, $y_7 = 0$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{12} = 5 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{14} = 3 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{15} = -1 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{16} = 3 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{25} = -3 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{35} = 11 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{43} = -5 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{47} = 0$ (optimalt). Alla optimalitetsvillkor är uppfyllda, så lösningen är optimal.

Ändring i totalkostnad: Första iterationen gjorde flödesändring noll, vilket ger kostnadsändring noll. I andra iterationen gjordes flödesändringen 1, och eftersom reducerad kostnad för inkommande variabel var -1, och flödet ökades, så blir kostnadsändringen -1. Totalkostnaden minskades alltså med 1.

2c: Finn maxflöde från nod 1 till nod 5 (i nätverket utan nod 7 och utan båge (6,3)). (Jag väljer att inte ha med båge (1,5). Om man har kvar den blir maxflödet självklart en enhet större.)

Starta med flöde noll. Lösningsgång: Sök maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 1-2-6-5, med kapacitet 4. Skicka 4 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Bågarna (2,6) och (6,5) blir fulla.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får nu vägen 1-6-2-5, med kapacitet 2. Skicka 2 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (2,5) blir full.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får nu vägen 1-4-3-5, med kapacitet 1. Skicka 1 enhet och ändra tillåtna riktningar. (Båge (4,3) blir full.) Har vi kvar båge (1,5), får vi den som väg, med kapacitet 1. Skicka en enhet. Bågen blir full.

I nästa iteration kan man i Dijkstras metod märka noderna 1, 2, 4 och 6, så minsnittet går över bågarna (2,5), (6,5) och (4,3). Det betyder att om man vill öka maxflödet, måste kapaciteten på någon av dessa bågar ökas. Maxflödet är 7.

Uppgift 3

3a: Rita upp det tillåtna området. Rita in de givna punkterna. Sjukstugan måste placeras inom det konvexa höljet av punkterna. Flyttar man den utanför det konvexa höljet, ökar avståndet till alla punkter. Området för optimal placering blir då skärningen mellan det tillåtna området och det konvex höljet, vilket ser ut som en sned triangel.

3b: $\min f(x)$ då $x \in X$, där $X = \{(x, y) : 2x + y \leq 5, x + y \geq 2, x \geq 0, y \geq 0\}$ och $f(x) = (x-1)^2 + (y-1)^2 + (x-3)^2 + (y-2)^2 + (x-1)^2 + (y-4)^2 + (x-3)^2 + (y-4)^2 = 4x^2 + 4y^2 - 16x - 22y + 57$.

3c: Skriv problemet på standardform för att applicera KKT-villkoren.
$g_1(x) = 2x + y - 5 \leq 0$, $g_2(x) = -x - y + 2 \leq 0$, $g_3(x) = -x \leq 0$, $g_4(x) = -y \leq 0$,
$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 8x - 16 \\ 8y - 22 \end{pmatrix}$, $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$,
$\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_4(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

För punkt (0, 0):
KKT1: Punkten är inte tillåten, så KKT1 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

För punkt (1, 2):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Inget av bivillkoren är aktivt, så $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -16 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta saknar uppenbarligen lösning, så KKT3 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

För punkt (3, 1):
KKT1: Punkten är inte tillåten, så KKT1 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

För punkt (1.3, 2.4):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 2, 3 och 4 är inte aktiva, så $u_2 = u_3 = u_4 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -5.6 \\ -2.8 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $u_1 = 2.8 \geq 0$, så KKT4 är uppfyllt. Punkten är en KKT-punkt.

Målfunktionen är summan av kvadrater, så den är konvex, och eftersom bivillkoren är linjära, är problemet konvext. Därför är KKT-punkten (1.3, 2.4) optimal.

3d: Lagrangerelaxationen:
$\varphi(u) = \min_{(x,y)\geq 0} 4x^2 + 4y^2 - 16x - 22y + 57 + u_1(2x + y - 5) + u_2(-x - y + 2) = (\min_{x\geq 0} 4x^2 - 16x + u_1(2x) + u_2(-x)) + \min_{y\geq 0} 4y^2 - 22y + u_1(y) + u_2(-y) + 57 + u_1(-5) + u_2(2) = (\min_{x\geq 0} 4x^2 + (2u_1 - u_2 - 16)x + \min_{y\geq 0} 4y^2 + (u_1 - u_2 - 22)y + 57 - 5u_1 + 2u_2$

För $u = (0, 0)$, får vi $x = 2$ och $y = 11/4 = 2.75$, med $\varphi(0, 0) = 10.75$. Undre gräns: 10.75. Punkten är inte tillåten. Den uppfyller bivillkor 2, men inte bivillkor 1. Därför ökar vi u_1 till 2.

För $u = (2, 0)$, får vi $x = 3/2$ och $y = 2.5$, med $\varphi(2, 0) = 13$. Undre gräns: 13. Punkten är inte tillåten. Den uppfyller bivillkor 2, men inte bivillkor 1. Därför ökar vi u_1 till 4.

För $u = (4, 0)$, får vi $x = 1$ och $y = 9/4 = 2.25$, med $\varphi(0) = 12.75$. Punkten är tillåten. Undre gräns ej förändrad. Övre gräns: 15.75.

Optimala u ligger mellan (2, 0) och (4, 0). Övre gräns: 15.75. Undre gräns: 13.

3e: I startpunkten (2, 0) är bivillkor 2 och 4 aktiva. Första LP-problemet blir

$$\min z = -22d_2 \text{ då } d_1 + d_2 \geq 0,\ d_2 \geq 0, \text{ samt } -1 \leq d \leq 1,$$

vilket har optimallösning $d = (0, 1)$ med $z = -22$. Sätt $x^{(2)} = (2, t)$. Maximal steglängd blir 1. Linjesökning ger något som är större än 1, så vi får $x^{(2)} = (2, 1)$.

Nu är bara bivillkor 1 aktivt. LP-problemet blir

$$\min z = -14d_2 \text{ då } 2d_1 + d_2 \leq 0, \text{ samt } -1 \leq d \leq 1,$$

vilket har optimallösning $d = (-0.5, 1)$ med $z = -14$. Sätt $x^{(3)} = (2 - 0.5t, 1 + t)$. Maximal steglängd blir 4. Linjesökning ger $t = 1.4$, så vi får $x^{(2)} = (1.3, 2.4)$.

Nu är bivillkor 1 aktivt. LP-problemet blir

$$\min z = -5.6d_1 - 2.8d_2 \text{ då } 2d_1 + d_2 \leq 0, \text{ samt } -1 \leq d \leq 1,$$

vilket har optimallösning $d = (0, 0)$ (till exempel) med $z = 0$. Alltså är $x = (1.3, 2.4)$ optimal.

Uppgift 4

4a: Billigaste väg-problem. Använd Dijkstras metod. Vi får $y_1 = 0$, $p_1 = -$, $y_2 = 1$, $p_2 = 1$, $y_3 = 4$, $p_3 = 2$, $y_4 = 3$, $p_4 = 1$, $y_5 = 6$, $p_5 = 3$, $y_6 = 9$, $p_6 = 3$, $y_7 = 10$, $p_7 = 6$. Uppnystning ger vägen 1 - 2 - 3 - 6 - 7 med smittorisk 10.

4b: Varje nod delas upp i två, med alla inbågar till den första och alla utbågar från den andra. På bågen mellan dem sätts kostnaden lika med smittorisken i noden. (Man kan även, lite informellt, öka nodpriserna i varje nod med smittorisken i noden. Formellt har man då inte längre ett billigaste väg-problem, men metoden fungerar.)

Vi får $y_1 = 2$, $p_1 = -$, $y_2 = 5$, $p_2 = 1$, $y_3 = 10$, $p_3 = 2$, $y_4 = 7$, $p_4 = 1$, $y_5 = 15$, $p_5 = 3$, $y_6 = 17$, $p_6 = 4$, $y_7 = 21$, $p_7 = 6$. Uppnystning ger vägen 1 - 4 - 6 - 7 med smittorisk 21.

Uppgift 5

5a: Modell:
max $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4$ då $2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 \leq 5$, $3x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 \leq 3$ och $x_j \in \{0, 1\}$ för alla j.

Tillåten lösning $(1, 0, 0, 0)$ ger undre gräns $\underline{z} = 2$. Målfunktionsbivillkoret blir då $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 \geq 3$.

Den första fixeringen är $x_2 = 0$ pga bivillkor 2. Därefter fås inga fler fixeringar. Förgrena över x_1. Gå ner i 1-grenen först: Bivillkor 2 ger fixeringarna $x_3 = 0$ och $x_4 = 0$. Nu är alla variablerna fixerade, men målfunktionsbivillkoret är inte uppfyllt, så grenen kapas.

Vi går ner i andra grenen, där $x_2 = 0$ och $x_1 = 0$. Målfunktionsbivillkoret ger då $x_3 = 1$. Bivillkor 2 ger då $x_4 = 0$. Nu är alla variablerna fixerade, och kontroll visar att alla bivillkor är uppfyllda. Vi har fått en bättre tillåten lösning $(0, 0, 1, 0)$ med $z = 4$. Kapa grenen.

Trädet är nu avsökt. Vår bästa lösning är att bara ge kurs 3 på Campus.

5b: LP-problemet löses med algoritmen för kontinuerligt kappsäcksproblem, baserad på kvoterna c_j/a_j (störst är bäst). Kvoterna blir: x_1: $2/3 \approx 0.667$, x_2: $3/4 = 0.75$, x_3: $4/3 \approx 1.333$, x_4: $2/3 \approx 0.667$, så x_3 är bäst, följt av x_2, med x_1 och x_4 lika på sista plats.

P0: LP-lösningen blir $x_3 = 1$ ger $\hat{b} = 4 - 3 = 1$, $x_2 = 1/4 = 0.25$, $x_1 = 0$, $x_4 = 0$, med $z = 4.75$, vilket ger $\bar{z} = 4$.
Förgrena över x_2: P1 = P0 + $(x_2 \leq 0)$, P2 = P0 + $(x_2 \geq 1)$.

P2: LP-lösning: $x_2 = 1$, ger $\hat{b} = 4 - 4 = 0$, $x_3 = 0$, $x_1 = 0$, $x_4 = 0$, med $z = 3$. Tillåten heltalslösning, vilket ger $\underline{z} = 3$.

P1: $x_2 = 0$: LP-lösningen blir $x_3 = 1$ ger $\hat{b} = 4 - 3 = 1$, $x_1 = 1/3$, $x_4 = 0$, med $z = 4.67$, vilket ger $\bar{z} = 4$.
Förgrena över x_1: P3 = P1 + $(x_1 \leq 0)$, P4 = P1 + $(x_1 \geq 1)$.

P4: $x_2 = 0$, $x_1 = 1$, ger $\hat{b} = 4 - 3 = 1$: LP-lösningen blir $x_3 = 1/4 = 0.25$, $x_4 = 0$, med $z = 3$, vilket ger $\bar{z} = 3$. Vi har nu $\bar{z} = \underline{z}$, så grenen kapas.

P3: $x_2 = 0$, $x_1 = 0$: LP-lösningen blir $x_3 = 1$ ger $\hat{b} = 4 - 3 = 1$, $x_4 = 1/3$, med $z = 4.67$, vilket ger $\bar{z} = 4$.
Förgrena över x_4: P5 = P3 + $(x_4 \leq 0)$, P6 = P3 + $(x_4 \geq 1)$.

P6: $x_2 = 0$, $x_1 = 0$, $x_4 = 1$, ger $\hat{b} = 4 - 3 = 1$: LP-lösning: $x_3 = 1/4 = 0.25$, med

$z = 3$, vilket ger $\bar{z} = 3$. Vi har nu $\bar{z} = \underline{z}$, så grenen kapas.

P5: $x_2 = 0$, $x_1 = 0$, $x_4 = 0$: LP-lösningen blir $x_3 = 1$ ger $\hat{b} = 4 - 3 = 1$, med $z = 4$, Tillåten heltalslösning, vilket ger $\underline{z} = 4$. Kapa grenen.

Trädet avsökt. Bästa lösning är $x = (0, 0, 1, 0)$, med $z = 4$.
Svar: Ge bara kurs 3 på campus.

Uppgift 6

Kinesiska brevbärarproblemet. Noderna 2, 3, 5 och 8 har udda valens. De förbinds billigast med bågarna (2, 4), (4, 8), (3, 6) och (5, 6), till en kostnad av 26, så dessa bågar dubbleras (körs mer än en gång) till kostnad av 26/4=6.5. En rundtur blir då t.ex. 1-2-7-8-4-2-4-8-9-5-6-3-6-5-4-3-1, med kostnaden $98 + 6.5 = 104.5$. Korsningarna 7 och 9 passeras en gång, korsningarna 2, 3, 5, 6, 8 passeras två gånger, korsningen 4 passeras tre gånger, korsning 1 passeras ingen gång, förutom start och slut.

Uppgift 7

7a: Handelsresandeproblem. Billigaste 1-träd ger kostnad 48, vilket är en undre gräns. Med heuristik kan man få turen 1-2-8-7-9-5-6-3-10-4-1, med kostnad 50. Vi får övre gräns 50 och undre gräns 48, så vår lösning är högst 2 enheter för dyr.

7b: Nod 3 har för hög valens i 1-trädet, så vi kan lägga till bivillkoret
$x_{23} + x_{34} + x_{36} + x_{38} + x_{3,10} \leq 2$.

Uppgift 8

Efter första steget fås $\alpha = (4, 6, 7, 4, 5)$ och $\beta = (0, 0, 0, 0, 1)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 3 och 5 samt kolumn 1 och 3, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (5, 7, 7, 5, 5)$ och $\beta = (-1, 0, -1, 0, 1)$. Nu fås lösningen $x_{14} = 1$, $x_{21} = 1$, $x_{32} = 1$, $x_{43} = 1$, $x_{55} = 1$, och total kostnad blir 28. Optimal duallösning är ovanstående α och β. Summering av duallösningen ger 28, så starka dualsatsen är uppfylld.