Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

TAOP88
Lösning till tentamen
2020-10-27

Lösningar

Uppgift 1

1a: Inför slackvariabler x_4, x_5, x_6, x_7 och x_8. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$\hat{b}$
z	1	-5	-6	-4	0	0	0	0	0	0
x_4	0	1	1	1	1	0	0	0	0	15
x_5	0	1	1	0	0	1	0	0	0	12
x_6	0	1	0	0	0	0	1	0	0	8
x_7	0	0	1	0	0	0	0	1	0	12
x_8	0	0	0	1	0	0	0	0	1	10

Först fås x_2 som inkommande variabel och x_5 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$\hat{b}$
z	1	1	0	-4	0	6	0	0	0	72
x_4	0	0	0	1	1	-1	0	0	0	3
x_2	0	1	1	0	0	1	0	0	0	12
x_6	0	1	0	0	0	0	1	0	0	8
x_7	0	-1	0	0	0	-1	0	1	0	0
x_8	0	0	0	1	0	0	0	0	1	10

Därefter fås x_3 som inkommande variabel och x_4 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$\hat{b}$
z	1	1	0	0	4	2	0	0	0	84
x_3	0	0	0	1	1	-1	0	0	0	3
x_2	0	1	1	0	0	1	0	0	0	12
x_6	0	1	0	0	0	0	1	0	0	8
x_7	0	-1	0	0	0	-1	0	1	0	0
x_8	0	0	0	0	-1	1	0	0	1	7

Nu är tablån optimal. Optimallösningen blir $x_1 = 0$, $x_2 = 12$, $x_3 = 3$, (samt $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 8$, $x_7 = 0$ och $x_8 = 7$) med $z = 84$.

De två första bivillkoren är aktiva, eftersom slackvariablerna inte är med i basen. Dock är basvariabel x_7 lika med noll, så bivillkor 4 är också aktivt (i en degenererad baslösning). Duallösningen läses av i målfunktionsraden under slackvariablerna: $y_1 = 4$, $y_2 = 2$, $y_3 = 0$, $y_4 = 0$, $y_5 = 0$, $v = 84$.

Svar i ord: Skicka 12000 andningsskydd till Tyskland och 3000 andningsskydd till England, men inga till Sverige. Alla tillgängliga delar går åt, eftersom de två första bivillkoren är aktiva, och bara Tyskland får all efterfrågan tillgodosedd, eftersom de andra bivillkoren inte är aktiva (med slackvariabler som inte är noll).

1b: Villkoren har skuggpris 4 och 2, så högerledet i första bivillkoret verkar bäst att öka.

1c: Ny variabel x_9. Reducerad kostnad: $\hat{c}_9 = c_9 - a_9^T y = c_9 - (y_1 + 2y_2) = c_9 - (4+4) = c_9 - 8 > 0$ om $c_9 > 8$. Svar: Vinsten ska vara större än 8.

Uppgift 2

2a: Rita upp det tillåtna området. Rita in de givna punkterna. Stationen måste placeras inom det konvexa höljet av punkterna. Flyttar man den utanför det konvexa höljet, ökar avståndet till alla punkter. Det kan ses för punkt (4,0), där en liten förflyttning i riktning (-3,8) minskar avståndet till alla punkter. Det konvexa höljet får extrempunkterna (0,0), (3,5) och (8,3). Området för optimal placering blir då skärningen mellan det tillåtna området och det konvex höljet.

2b: Skriv problemet på standardform för att applicera KKT-villkoren.
$g_1(x) = x + 2y - 8 \leq 0$, $g_2(x) = -x + 1 \leq 0$, $g_3(x) = x - 4 \leq 0$, $g_4(x) = -y \leq 0$, $g_5(x) = y - 3 \leq 0$, $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 8x - 30 \\ 8y - 24 \end{pmatrix}$, $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_4(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_5(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

För punkt (0, 0):
KKT1: Punkten är inte tillåten, så KKT1 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

För punkt (2, 2):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Inget av bivillkoren är aktivt, så $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_5 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -14 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta saknar uppenbarligen lösning, så KKT3 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

För punkt (4, 2):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 2, 4 och 5 är inte aktiva, så $u_2 = u_4 = u_5 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} 2 \\ -8 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $u_1 = 4$ och $u_3 = -6$, så KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

För punkt (3.4, 2.3):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 2, 3, 4 och 5 är inte aktiva, så $u_2 = u_3 = u_4 = u_5 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -2.8 \\ -5.6 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $u_1 = 2.8 \geq 0$, så KKT4 är uppfyllt. Punkten är en KKT-punkt.

Målfunktionen är summan av kvadrater, så den är konvex, och eftersom bivillkoren är linjära, är problemet konvext. Därför är KKT-punkten (3.4, 2.3) optimal.

2c: Lagrangerelaxationen:
$\varphi(u) = \min_{1\le x_1\le 4, 0\le x_2\le 3} 4x^2+4y^2-30x-24y+139+u_1(x+2y-8) = (\min_{1\le x\le 4}(4x^2-30x+u_1x))+(\min_{0\le y\le 3} 4y^2-24y+2u_1y)+139-8u_1 = (\min_{1\le x\le 4}(4x^2+(u_1-30)x))+(\min_{0\le y\le 3} 4y^2+(2u_1-24)y)+139-8u_1$

För $u_1 = 0$, får vi $x = 3.75$ och $y = 3$, med $\varphi(0) = 46.75$. Undre gräns: 46.75. Punkten är inte tillåten. Den uppfyller inte bivillkor 1.

För $u_1 = 2$, får vi $x = 3.5$ och $y = 2.5$, med $\varphi(2) = 49$. Undre gräns: 49 (förbättrad). Punkten är inte tillåten.

För $u_1 = 3$, får vi $x = 3.375$ och $y = 2.25$, med $\varphi(3) = 49.1875$. Punkten är tillåten. Undre gräns: 49.1875 (förbättrad). Övre gräns: 49.5625.

Optimala u_1 ligger mellan 2 och 3. Övre gräns: 49.5625. Undre gräns: 49.1875.

2d: I startpunkten (1, 0) är bivillkor 2 och 4 aktiva. Första LP-problemet blir

$\min z = -22d_1 - 24d_2$ då $d_1 \ge 0$, $d_2 \ge 0$, samt $-1 \le d \le 1$,

vilket har optimallösning $d = (1, 1)$ med $z = -46$. Sätt $x^{(2)} = (1 + t, t)$. Maximal steglängd blir $7/3 \approx 2.33$. Linjesökning ger $t = 2.875$, så vi får $t = 7/3$ och $x^{(2)} = (10/3, 7/3)$.

Nu är bara bivillkor 1 aktivt. LP-problemet blir

$\min z = -10/3\ d_1 - 16/3\ d_2$ då $d_1 + 2d_2 \le 0$, samt $-1 \le d \le 1$,

vilket har optimallösning $d = (1, -0.5)$ med $z = -2/3$. Sätt $x^{(3)} = (10/3+t, 7/3-t/2)$. Maximal steglängd blir 2/3. Linjesökning ger $t = 1/15$, så vi får $x^{(2)} = (17/5, 23/10) = (3.4, 2.3)$.

Nu är bivillkor 1 aktivt. LP-problemet blir

$\min z = -2.8d_1 - 5.6d_2$ då $d_1 + 2d_2 \le 0$, samt $-1 \le d \le 1$,

vilket har optimallösning $d = (0, 0)$ (till exempel) med $z = 0$. Alltså är $x = (3.4, 2.3)$ optimal.

Uppgift 3

3a: Den givna startlösningen är tillåten och ger att basbågarna är (1,3), (2,4), (4,3), (4,5) samt någon av bågarna till nod 6, vi tar (3,6). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = -8$, $y_3 = 3$, $y_4 = -4$, $y_5 = 3$, $y_6 = 8$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{12} = 13 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{14} = 9 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{25} = 4 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{35} = 3 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). $\hat{c}_{56} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Alla optimalitetsvillkor är uppfyllda, så lösningen är optimal.

3b: Nu fås $\hat{c}_{56} = 4 + 3 - 8 = -1 < 0$, inte optimalt. Vi får x_{56} som inkommande variabel, att öka. Cykeln blir 5-6-3-4-5, och maximal ändring blir 1, pga. båge (4,3), så vi väljer (4,3) som utgående. Nu blir nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = -7$, $y_3 = 3$, $y_4 = -3$, $y_5 = 4$, $y_6 = 8$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{12} = 12 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{14} = 8 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{25} = 4 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). $\hat{c}_{35} = 4 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{43} = 0$ (optimalt). Alla optimalitetsvillkor är uppfyllda, så lösningen är optimal.

Ändring i totalkostnad: Innan flödesändringen, ändrades inte totalkostnaden, eftersom $x_{56} = 0$. Vi gjorde flödesändringen 1, och eftersom reducerad kostnad för inkommande variabel var -1, så minskades totalkostnaden med 1.

3c: Finn maxflöde från nod 1 till nod 6. Starta med flöde noll. Lösningsgång: Sök maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 1-3-5-6, med kapacitet 5. Skicka 5 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (3,5) blir full.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får nu vägen 1-2-4-3-6, med kapacitet 4. Skicka 4 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (3,6) blir full.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får nu vägen 1-4-5-6, med kapacitet 1. Skicka 1 enhet och ändra tillåtna riktningar. (Båge (5,6) blir full.)

I nästa iteration kan man i Dijkstras metod märka noderna 1, 2, 3, 4 och 5, så minsnittet går över bågarna (3,6) och (5,6). Det betyder att om man vill öka maxflödet, måste kapaciteten på någon av dessa bågar ökas. Maxflödet är 10.

Uppgift 4

P0: Grafisk lösning ger $x_1 = 19/7 \approx 2.71$, $x_2 = 0$ och $z = 114/7 \approx 16.28$, vilket ger $\bar{z} = 16$.
Förgrena över x_1: P1 = P0 + $(x_1 \leq 2)$, P2 = P0 + $(x_1 \geq 3)$.
P1: Grafisk lösning: $x_1 = 2$, $x_2 = 5/6 \approx 0.83$, $z = 46/3 \approx 15.33$ vilket ger $\bar{z} = 15$.
Förgrena över x_2: P3 = P1 + $(x_2 \leq 0)$, P4 = P1 + $(x_2 \geq 1)$.
P3: Grafisk lösning: $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $z = 12$. Heltalig lösning, $\underline{z} = 12$. Kapa.
P4: Grafisk lösning: $x_1 = 13/7 \approx 1.86$, $x_2 = 1$, $z = 106/7 \approx 15.14$, vilket ger $\bar{z} = 15$.
Förgrena över x_1: P5 = P4 + $(x_1 \leq 1)$, P6 = P4 + $(x_1 \geq 2)$.
P5: Grafisk lösning: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $z = 14$, vilket ger $\bar{z} = 14$. Heltalig lösning, kapa, $\underline{z} = 14$.
P6: Saknar tillåten lösning. Kapa.
P2: Saknar tillåten lösning. Kapa.
Trädet avsökt. Optimallösning: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$. Svar: Bygg ut en modul av sort 1 och två av sort 2. Målfunktionsvärde 14.

Uppgift 5

5a: Billigaste väg-problem. Använd Dijkstras metod. Vi får $y_1 = 0$, $p_1 = -$, $y_2 = 4$, $p_2 = 1$, $y_3 = 4$, $p_3 = 1$, $y_4 = 6$, $p_4 = 3$, $y_5 = 6$, $p_5 = 3$, $y_6 = 8$, $p_6 = 2$, $y_7 = 9$, $p_7 = 5$. Uppnystning ger vägen 1 - 3 - 5 - 7 med restid 9.

4b: Billigaste väg-problem med negativa kostnader. Använd Fords metod. Vi får $y_1 = 0$, $p_1 = -$, $y_2 = 0$, $p_2 = 3$, $y_3 = 2$, $p_3 = 1$, $y_4 = 2$, $p_4 = 5$, $y_5 = 4$, $p_5 = 3$, $y_6 = 1$, $p_6 = 2$, $y_7 = 2$, $p_7 = 6$. Uppnystning ger vägen 1 - 3 - 2 - 6 - 7 med kostnad 2.

4c: Ja, $y_6 = 8$, så det blir lite billigare att leverera dit.

Uppgift 6

6a: Kinesiska brevbärarproblemet. Noderna 1, 2, 3 och 6 har udda valens. De förbinds billigast med bågarna (1,6) och (2,3), till en kostnad av 13, så dessa bågar dubbleras (körs mer än en gång) till kostnad av 13. En rundtur blir då t.ex. 1-2-3-4-6-1-6-5-3-2-5-1, med kostnaden $61 + 13 = 74$.

6b: Handelsresandeproblem. Billigaste 1-träd ger kostnad 33, vilket är en undre gräns. Genom att byta två bågar, exempelvis (1,5) mot (1,6) och (5,6) mot (4,6), kan man få en tillåten tur, med kostnad 36, vilket blir en övre gräns. Vi får övre gräns 36 och undre gräns 33, så vår lösning är högst 3 enheter för dyr.

Nod 5 har för hög valens i 1-trädet, så vi kan lägga till bivillkoret $x_{15} + x_{25} + x_{35} + x_{45} + x_{65} \leq 2$.

Uppgift 7

7a: Efter första steget fås $\alpha = (8, 9, 9, 7, 8)$ och $\beta = (27, 18, 7, 0, 5)$. Nu kan man inte stryka alla nollor med färre än 5 streck. Man får t.ex. lösningen $x_{13} = 1$, $x_{21} = 1$, $x_{35} = 1$, $x_{42} = 1$, $x_{54} = 1$, och total kostnad blir 98. Optimal duallösning är ovanstående α och β. Summering av duallösningen ger 98, så starka dualsatsen är uppfylld.

7b: Primala optimallösningen förändras ej. Duala optimallösningen förändras enbart med att α_1 ökas med 100 (från 8 till 108).