Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

TAOP88
Lösning till tentamen
2021-01-04

# Lösningar

## Uppgift 1

**1a:** Inför slackvariabler $x_5$, $x_6$, $x_7$, $x_8$, $x_9$ och $x_{10}$. Starta med slackvariablerna i basen.

| Bas | $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_9$ | $x_{10}$ | $\hat{b}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | 1 | -1 | -3 | -2 | -1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| $x_5$ | 0 | 4 | 3 | 5 | 6 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 50 |
| $x_6$ | 0 | 2 | 2 | 4 | 5 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 40 |
| $x_7$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 20 |
| $x_8$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 10 |
| $x_9$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 50 |
| $x_{10}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 100 |

Först fås $x_2$ som inkommande variabel och $x_8$ som utgående.

| Bas | $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_9$ | $x_{10}$ | $\hat{b}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | 1 | -1 | 0 | -2 | -1 | 0 | 0 | 0 | 3 | 0 | 0 | 30 |
| $x_5$ | 0 | 4 | 0 | 5 | 6 | 1 | 0 | 0 | -3 | 0 | 0 | 20 |
| $x_6$ | 0 | 2 | 0 | 4 | 5 | 0 | 1 | 0 | -2 | 0 | 0 | 20 |
| $x_7$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 20 |
| $x_2$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 10 |
| $x_9$ | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 50 |
| $x_{10}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 100 |

Därefter fås $x_3$ som inkommande variabel och $x_5$ som utgående.

| Bas | $z$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_9$ | $x_{10}$ | $\hat{b}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $z$ | 1 | 3/5 | 0 | 0 | 7/5 | 2/5 | 0 | 0 | 9/5 | 0 | 0 | 38 |
| $x_3$ | 0 | 4/5 | 0 | 1 | 6/5 | 1/5 | 0 | 0 | -3/5 | 0 | 0 | 4 |
| $x_6$ | 0 | -6/5 | 0 | 0 | 1/5 | -4/5 | 1 | 0 | 2/5 | 0 | 0 | 4 |
| $x_7$ | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 20 |
| $x_2$ | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 10 |
| $x_9$ | 0 | -4/5 | 0 | 0 | -6/5 | -1/5 | 0 | 0 | 3/5 | 1 | 0 | 46 |
| $x_{10}$ | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 100 |

Nu är tablån optimal. Optimallösningen blir $x_1 = 0$, $x_2 = 10$, $x_3 = 4$, $x_4 = 0$, (samt $x_5 = 0$, $x_6 = 4$, $x_7 = 20$, $x_8 = 0$, $x_9 = 46$ och $x_{10} = 100$) med $z = 38$.

Det första och det fjärde bivillkoret är aktiva, eftersom slackvariablerna inte är noll. Duallösningen läses av i målfunktionsraden under slackvariablerna: $y_1 = 2/5$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$, $y_4 = 9/5$, $y_5 = 0$, $y_6 = 0$, $v = 38$.

Svar i ord: Skicka Beställ 10 doser från Tyskland och 4 från USA, men inga från Ryssland och Kina. Hela budgeten går åt, eftersom det första bivillkoret är aktivt, och alla tillgängliga doser från Tyskland går åt, eftersom det fjärde bivillkoret är aktivt.

**1b:** Det största skuggpriset är $y_4 = 9/5$, så man hade tjänat mest på att förhandla fram ökad tillgång från Tyskland. (Det näst största skuggpriset är $y_1 = 2/5$, så en ökad budget kommer på andra plats.)

**1c:** Ny variabel $x_{11}$. Reducerad kostnad: $\hat{c}_{11} = c_{11} - a_{11}^T y = c_{11} - (6y_1 + 3y_2) = c_{11} - (12/5) > 0$ om $c_{11} > 12/5 = 2.4$. Svar: Nyttokoefficienten ska vara större än 2.4.

## Uppgift 2

**2a:** Skriv problemet på standardform för att applicera KKT-villkoren.
$g_1(x) = x_1 + x_2 + x_3 - 10 \leq 0$, $g_2(x) = -x_1 + 1 \leq 0$, $g_3(x) = x_1 - 3 \leq 0$, $g_4(x) = -x_2 + 2 \leq 0$, $g_5(x) = x_2 - 5 \leq 0$, $g_6(x) = -x_3 + 3 \leq 0$, $g_7(x) = x_3 - 6 \leq 0$,
$\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 - 20 \\ 2x_2 - 8 \\ 8x_1 - 80 \end{pmatrix}$, $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$,
$\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_4(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_5(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\nabla g_6(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$,
$\nabla g_7(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

För punkt (3, 5, 6):
KKT1: Punkten är inte tillåten, så KKT1 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

För punkt (2, 3, 4):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Inget av bivillkoren är aktivt, så $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_5 = u_6 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -12 \\ -2 \\ -48 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta saknar uppenbarligen lösning, så KKT3 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

För punkt (1, 5, 4):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 3, 4, 6 och 7 är inte aktiva, så $u_3 = u_4 = u_6 = u_7 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -16 \\ 2 \\ -48 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $u_1 = 48$, $u_2 = 32$ och $u_5 = -50$, så KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

För punkt (2, 2, 6):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 2, 3, 5 och 6 är inte aktiva, så $u_2 = u_3 = u_5 = u_6 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -12 \\ -4 \\ -32 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_7 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $u_1 = 12$, $u_4 = 8$ och $u_7 = 20$,så $u \geq 0$, och KKT4 är uppfyllt. Punkten är en KKT-punkt.

Målfunktionen är summan av kvadrater, så den är konvex, och eftersom bivillkoren är linjära, är problemet konvext. Därför är KKT-punkten (2, 2, 6) optimal.

**2b:** Lagrangerelaxationen:
$\varphi(u) = \min_{1\le x_1\le 3, 2\le x_2\le 5, 3\le x_3\le 6} 2x_1^2 + x_2^2 + 4x_3^2 - 20x_1 - 8x_2 - 80x_3 + 466 + u(x_1 + x_2 + x_3 - 10) = (\min_{1\le x_1\le 3} 2x_1^2 + (u-20)x_1) + (\min_{2\le x_2\le 5} x_2^2 + (u-8)x_2) + (\min_{3\le x_3\le 6} 4x_3^2 + (u-80)x_3) + 466 - 10u$

För $u = 0$ får vi $x_1 = 3$, $x_2 = 4$ och $x_3 = 6$, med $\varphi(0) = 72$. Undre gräns: 72. Punkten är inte tillåten. Den uppfyller inte bivillkor 1.

För $u = 10$ får vi $x_1 = 2.5$, $x_2 = 2$ och $x_3 = 6$, med $\varphi(10) = 85.5$. Undre gräns: 85.5. Punkten är inte tillåten. Den uppfyller inte bivillkor 1.

För $u = 12$ får vi $x_1 = 2$, $x_2 = 2$ och $x_3 = 6$, med $\varphi(12) = 86$. Undre gräns: 86. Punkten är tillåten. Övre gräns: 86.

För $u = 15$ får vi $x_1 = 1.25$, $x_2 = 2$ och $x_3 = 6$, med $\varphi(15) = 84.875$. Undre gräns: 86 (förbättras ej). Punkten är tillåten. Övre gräns förbättras ej.

Det optimala värdet är $u = 12$. Då fås en lösning som uppfyller det relaxerade bivillkoret med likhet (vilket gör att övre och undre gräns blir lika). Optimalt målfunktiosvärder: 86. Optimal lösning: $x_1 = 2$, $x_2 = 2$ och $x_3 = 6$.

**2c:** I startpunkten (1, 2) är undre gränserna på variablerna aktiva. Första LP-problemet blir

$\min z = -16d_1 - 4d_2$ då $d_1 \ge 0$, $d_2 \ge 0$, samt $-1 \le d \le 1$,

vilket har optimallösning $d = (1, 1)$ med $z = -20$. Sätt $x^{(2)} = (1 + t, 2 + t)$. Maximal steglängd blir 1/2. Linjesökning ger $t = 10/3$, så vi får $t = 1/2$ och $x^{(2)} = (3/2, 5/2)$.

Nu är bara bivillkor 1 aktivt. LP-problemet blir

$\min z = -14d_1 - 3d_2$ då $d_1 + d_2 \le 0$, samt $-1 \le d \le 1$,

vilket har optimallösning $d = (1, -1)$ med $z = -11$. Sätt $x^{(3)} = (3/2 + t, 5/2 - t)$. Maximal steglängd blir 1/2. Linjesökning ger $t = 11/6$, så vi får $t = 1/2$, och $x^{(3)} = (2, 2)$.

Nu är bivillkor 1 och 4 aktiva. LP-problemet blir

$\min z = -12d_1 - 4d_2$ då $d_1 + d_2 \le 0$, $d_2 \ge 0$, samt $-1 \le d \le 1$,

vilket har optimallösning $d = (0, 0)$ med $z = 0$. Alltså är $x = (2, 2)$ optimal.

## Uppgift 3

**3a:** Inför en dummykälla, nod 7, av styrka 2 (som är total sänkstyrka 8 minus total källstyrka 6), och bågar (7,4), (7,5) och (7,6) med kostnad noll. Flödet i dessa bågar är bristen, dvs. det som kommer att saknas.

**3b:** I den givna startlösningen är $x_{74} = 1$, $x_{75} = 1$ och $x_{76} = 0$. Startlösningen är tillåten och ger att basbågarna är (1,3), (3,6), (2,4), (7,4) och (7,5) samt t.ex. (5,3). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = -8$, $y_3 = 6$, $y_4 = 0$, $y_5 = 0$, $y_6 = 14$, $y_7 = 0$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{16} = -5 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{25} = -1 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{43} = 2 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{45} = 7 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{65} = 23 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{76} = -14 < 0$ (ej optimalt ty $x = 0$). Vi får $x_{76}$ som inkommande variabel, att öka. Cykeln blir 7-6-3-5-7, och maximal ändring blir 0, pga. båge (5,3), så vi väljer (5,3) som utgående. Nu blir nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 6$, $y_3 = 6$, $y_4 = 14$, $y_5 = 14$, $y_6 = 14$, $y_7 = 14$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{16} = -5 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{25} = -1 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{43} = 16 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{45} = 7 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{53} = 14 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). $\hat{c}_{65} = 9 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Alla optimalitetsvillkor är uppfyllda, så lösningen är optimal. Observera att vi inte har ändrat flödet. (Hade vi valt (7,6) som basbåge från början, hade vi inte behövt göra en degenererad iteration.)

**3c:** Nu fås $\hat{c}_{25} = 6 + 10 - 14 = 2 > 0$, inte optimalt. Vi får $x_{25}$ som inkommande variabel, att minska. Cykeln blir 5-2-4-7-5, och maximal ändring blir 1, pga. båge (2,4) (eller (7,4)), så vi väljer (2,4) som utgående. Nu blir nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 4$, $y_3 = 6$, $y_4 = 14$, $y_5 = 14$, $y_6 = 14$, $y_7 = 14$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{16} = -5 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{24} = -2 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{43} = 16 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{45} = 7 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{53} = 14 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). $\hat{c}_{65} = 9 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Alla optimalitetsvillkor är uppfyllda, så lösningen är optimal.

Vi gjorde flödesändringen $-1$, och eftersom reducerad kostnad för inkommande variabel var 2, så minskades totalkostnaden med 2.

**3d:** Kalla superkällan nod 8 och supersänkan nod 9. (Nod 7 från tidigare deluppgifter finns ej med.)

Finn maxflöde från nod 8 till nod 9. Starta med flöde noll. Lösningsgång: Sök maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 8-2-4-9, med kapacitet 3. Skicka 3 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (2,4) blir full.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får nu t.ex. vägen 8-2-5-9, med kapacitet 2. Skicka 2 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (2,5) blir full.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får nu t.ex. vägen 8-1-3-9, med kapacitet 2. Skicka 2 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (1,3) blir full.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får nu vägen 8-1-6-9, med kapacitet 1. Skicka 1 enhet och ändra tillåtna riktningar. (Båge (1,6) blir full.) I nästa iteration kan man i Dijkstras metod märka noderna 8, 1 och 2, så minsnittet går över bågarna (1,3), (1,6), (2,4) och (2,5). Det betyder att om man vill öka maxflödet, måste kapaciteten på någon av dessa bågar ökas. Maxflödet är 8.

## Uppgift 4

P0: Grafisk lösning ger $x_1 = 0$, $x_2 = 19/9 \approx 2.11$ och $z = 95/3 \approx 31.67$, vilket ger $\bar{z} = 31$.
Förgrena över $x_2$: P1 = P0 + ($x_2 \leq 2$), P2 = P0 + ($x_2 \geq 3$).
P1: Grafisk lösning: $x_1 = 1/7 \approx 0.14$, $z = 220/7 \approx 31.43$ vilket ger $\bar{z} = 31$.
Förgrena över $x_1$: P3 = P1 + ($x_1 \leq 0$), P4 = P1 + ($x_1 \geq 1$).
P3: Grafisk lösning: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $z = 30$. Heltalig lösning, $\underline{z} = 30$. Kapa.
P4: Grafisk lösning: $x_1 = 1$, $x_2 = 4/3 \approx 1.33$, $z = 30$, vilket ger $\bar{z} = 30$.
Vi har nu $\bar{z} = 30 = \underline{z}$ så grenen kapas.
P2: Saknar tillåten lösning. Kapa.
Trädet avsökt. Optimallösning: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. Svar: Inrätta två vaccinationsstationer vid sjukhusen. Total kapacitet blir 30.

## Uppgift 5

**5a:** Billigaste väg-problem. Använd Dijkstras metod. Vi får $y_1 = 0$, $p_1 = -$, $y_2 = 2$, $p_2 = 1$, $y_3 = 4$, $p_3 = 1$, $y_4 = 4$, $p_4 = 1$, $y_5 = 6$, $p_5 = 2$, $y_6 = 6$, $p_6 = 2$, $y_7 = 7$, $p_7 = 3$, $y_8 = 7$, $p_7 = 4$, $y_9 = 8$, $p_7 = 4$, $y_{10} = 8$, $p_{10} = 5$, $y_{11} = 8$, $p_{11} = 5$, $y_{12} = 9$, $p_{12} = 7$, $y_{13} = 12$, $p_{13} = 11$, $y_{14} = 11$, $p_{14} = 7$, $y_{15} = 11$, $p_{15} = 9$, $y_{16} = 12$, $p_{16} = 11$, $y_{17} = 14$, $p_{17} = 15$. I ovanstående lösning anger $y_j$ när person $j$ blev smittad och $p_j$ av vem. Alla är smittade efter 14 dagar.

## Uppgift 6

Inga fixeringar fås i första rundan, så vi förgrenar över $x_1$.
I grenen $x_1 = 1$: Bivillkor 1 ger $x_3 = 0$. Bivillkor 3 ger $x_2 = 0$. Inga fler fixeringar. Förgrena över $x_4$.
I grenen $x_4 = 1$: ($x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$) Alla variabler fixerade. $x = (1, 0, 0, 1)$. Kolla tillåtenhet. Lösningen tillåten: $z = 15$.
Nytt målfunktionsbivillkor: $10x_1 + 7x_2 + 11x_3 + 5x_4 \geq 16$.
Kapa grenen.
I grenen $x_1 = 0$: Målfunktionsbivillkoret ger $x_3 = 1$. Bivillkor 1 ger $x_2 = 0$ och $x_4 = 0$. Alla variabler fixerade. $x = (0, 1, 0, 0)$. Kolla tillåtenhet. Målfunktionsbivillkoret kan ej uppfyllas. Kapa grenen.

Trädet avsökt. Optimal lösning: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 1$, med $z = 15$.
Svar: Värva kandidat 1 och 4.

## Uppgift 7

Kinesiska brevbärarproblemet. Noderna 2, 3, 5 och 9 har udda valens. De förbinds billigast med bågarna (3,5) samt (2,4) och (4,9), till en kostnad av 15, så dessa bågar dubbleras (gås mer än en gång) till kostnad av 15. En rundtur blir då t.ex. 1-3-5-3-4-5-6-7-9-8-2-4-9-4-2-10-1, med totaltiden $80 + 15 = 95$.

## Uppgift 8

Handelsresandeproblem. Billigaste 1-träd ger kostnad 26, vilket är en undre gräns.

Yttervarvet ger en tillåten lösning med kostnaden 31. Ett 3-byte, (1,2), (2,3), (6,7) bort, ersättes av (1,3), (2,6) och (2,7), sänker kostnaden till 29. (Även andra heurstiker kan användas.)

Vi får övre gräns 29 och undre gräns 26, så vår lösning är högst 3 enheter för dyr.

Nod 3 har för hög valens i 1-trädet, så vi kan lägga till bivillkoret
$x_{13} + x_{23} + x_{34} + x_{36} \leq 2$.

## Uppgift 9

**9a:** Efter första steget fås $\alpha = (7, 8, 8, 5, 6)$ och $\beta = (0, 0, 8, 11, 6)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 1, 2 och 3, samt kolumn 2, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (7, 8, 8, 6, 7)$ och $\beta = (0, -1, 8, 11, 6)$. Man kan nu inte stryka alla nollor med färre än 5 streck. Man får t.ex. lösningen $x_{13} = 1$, $x_{24} = 1$, $x_{35} = 1$, $x_{42} = 1$, $x_{51} = 1$, och total kostnad blir 60. Optimal duallösning är ovanstående $\alpha$ och

$\beta$. Summering av duallösningen ger 60, så starka dualsatsen är uppfylld.

**9b:** Primala optimallösningen förändras ej. Duala optimallösningen förändras genom att $\beta_4$ ökas med 5 (från 11 till 16), $\beta_5$ ökas med 10 (från 6 till 16), och $\alpha_5$ ökas med 4 (från 7 till 11). (Skulle man lösa om problemet från början är det inte säkert att man får dessa $\alpha$ och $\beta$.)