Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

TAOP88
Lösning till tentamen
2021-10-27

Lösningar

Uppgift 1

1a: Skriv problemet på standardform för att applicera KKT-villkoren.
$g_1(x) = x_1 - 3 \leq 0$, $g_2(x) = -x_1 \leq 0$, $g_3(x) = x_2 - 5 \leq 0$, $g_4(x) = -x_2 \leq 0$, $g_5(x) = x_1 + 2x_2 - 10 \leq 0$, $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 - 24 \\ 8x_2 - 8 \end{pmatrix}$, $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_4(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_5(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Extrempunkter: (0, 5), (3, 0) och (3, 3.5) (samt origo).

För punkt (0, 5):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 1 och 4 är inte aktiva, så $u_1 = u_4 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -24 \\ 32 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $-u_2 + u_5 = 24$ och $u_3 + 2u_5 = -32$. (P.g.a redundans skulle man kunna sätta u_3 eler u_5 till noll, men det gör jag inte.) Vi får $u_2 = u_5 - 24$ och $u_3 = -32 - 2u_5$. För att få $u_2 \geq 0$ krävs $u_5 \geq 24$, och för att få $u_3 \geq 0$ krävs $u_5 \leq -16$, så det går inte att få båda uppfyllda. KKT4 kan inte uppfyllas. Punkten är inte en KKT-punkt.

För punkt (3, 0):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 2, 3 och 5 är inte aktiva, så $u_2 = u_3 = u_5 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -12 \\ -8 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $u_1 = 12$ och $u_4 = -8$, så KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

För punkt (3, 3.5):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 2, 3 och 4 är inte aktiva, så $u_2 = u_3 = u_4 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -12 \\ 20 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $u_1 + u_5 = 12$ och $2u_5 = -20$, vilket ger $u_2 = 22$ och $u_5 = -10$, så KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

Ingen av punkterna är KKT-punkt, och ingen därmed optimal.

1b: I startpunkten är inga bivillkoren aktiva. Första LP-problemet blir
min $z = -20d_1$ då $-1 \leq d \leq 1$,
vilket har optimallösning $d = (1, 0)$ med $z = -20$. Sätt $x^{(2)} = (1 + t, 1)$. Maximal steglängd blir 2. Linjesökning ger $t = 5$, så vi får $t = 2$ och $x^{(2)} = (3, 1)$.

Nu är bivillkor 1 aktivt. LP-problemet blir

min $z = -12d_1$ då $d_1 \leq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$,
vilket har (ickeunik) optimallösning $d = (0,0)$ med $z = 0$. Alltså är $x = (3,1)$ optimal.

1c: Lagrangerelaxationen:
$\varphi(u) = \min_{0\leq x_1 \leq 3, 0 \leq x_2 \leq 5} 2x_1^2 + 4x_2^2 - 24x_1 - 8x_2 + u(x_1 + 2x_2 - 10) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + (u - 24)x_1 + (2u-8)x_2 - 10u$

För $u = 2$ får vi $x_1 = 3$ och $x_2 = 1/2 = 0.5$, med $\varphi(2) = -69$. Undre gräns: -69. Punkten är tillåten, och ger övre gräns -57.

För $u = 3$ får vi $x_1 = 3$ och $x_2 = 1/4 = 0.25$, med $\varphi(3) = -301/4 = -75.25$. Undre gräns förbättras inte. Punkten är tillåten, och har målfunktionsvärde $-223/4 = -55.75$. vilket inte förbättrar övre gränsen. (Att båda gränserna försämras är ett tydligt tecken på att vi är på väg åt fel håll.)

Det optimala värdet på u är mindre än 2. Övre gräns är -57 och undre gräns är -69.

(Optimalt värde är faktiskt $u = 0$, vilket ger $x_1 = 3$ och $x_2 = 1$ med övre och undre gräns båda lika med -58. Så blir det när det relaxerade bivillkoret inte är aktivt i optimum.)

Uppgift 2

2a: Inför slackvariabler x_5, x_6 och x_7. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	-5	-4	-3	-4	0	0	0	0
x_5	0	2	2	3	4	1	0	0	200
x_6	0	1	2	0	0	0	1	0	80
x_7	0	0	0	1	2	0	0	1	100

Först fås x_1 som inkommande variabel och x_6 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	0	6	-3	-4	0	5	0	400
x_5	0	0	-2	3	4	1	-2	0	40
x_1	0	1	2	0	0	0	1	0	80
x_7	0	0	0	1	2	0	0	1	100

Därefter fås x_4 som inkommande variabel och x_5 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	0	4	0	0	1	3	0	440
x_4	0	0	-1/2	3/4	1	1/4	-1/2	0	10
x_1	0	1	2	0	0	0	1	0	80
x_7	0	0	1	-1/2	0	-1/2	1	1	80

Nu är tablån optimal. Optimallösningen blir $x_1 = 80$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 10$, (samt $x_5 = 0$, $x_6 = 0$ och $x_7 = 80$) med $z = 440$. Bivillkor 1 och 2 är aktiva, eftersom slackvariablerna är noll. Duallösningen läses av i målfunktionsraden under slackvariablerna: $y_1 = 1$, $y_2 = 3$, $y_3 = 0$, $v = 440$.

Svar i ord: Detta skulle ge 80 ettor och 10 bostäder med 4 rum eller fler. Bivillkoret för utrymme och material blir begränsande, samt det första av blandningsbivillkoret. Eftersom tvåor och treor saknas helt, är det tveksamt om det blir ett blandat boende. Det blir nog bara studenter och välbeställda familjer. (Om man bara har tre bivillkor blir högst tre variabler större än noll.)

2b: Skuggpriserna är lika med duallösningen (1, 3, 0), och anger hur mycket man skulle vinna på att öka högerledet men en enhet. Att öka högerledet på bivillor 1 skulle ge en viss vinst, att öka högerledet på bivillkor 2 skulle ge mer, men för bivillkor 3 inget. Välj bivillkor 2.

2c: Ny variabel x_8. Reducerad kostnad: $\hat{c}_8 = c_8 - a_8^T y = c_8 - 6y_1 = c_8 - 6 \geq 0$ om $c_8 \geq 6$. Vinsten skulle alltså behöva vara större än 6 för taklägenheter.

Uppgift 3

P0: LP-optimum: $x_1 = 100/7 \approx 14.28$, $x_2 = 50/7 \approx 7.14$, $z = 400/7 \approx 57.14$. Detta ger $\bar{z} = 57$. Vi förgrenar över x_1.

P1 = P0 +($x_1 \leq 14$).
P2 = P0 +($x_1 \geq 15$).

P1: LP-optimum: $x_1 = 14$, $x_2 = 7.5$, $z = 57$, så vi har fortfarande $\bar{z} = 57$. Förgrena över x_2.

P3 = P1 +($x_2 \leq 7$).
P4 = P1 +($x_2 \geq 8$).

P3: LP-optimum: $x_1 = 14$, $x_2 = 7$, $z = 56$. En tillåten heltalslösning, så vi får $\underline{z} = 56$. Spara lösningen och kapa grenen.

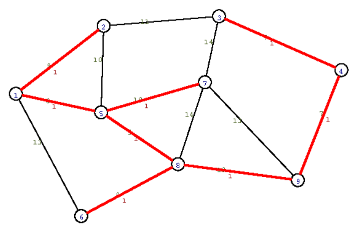
P4: LP-optimum: $x_1 = 13.6$, $x_2 = 8$, $z = 56.8$. Detta ger $\bar{z} = 56$. Grenen kan inte ge bättre lösning än vi har, kapa.

P2: Saknar tillåten lösning.

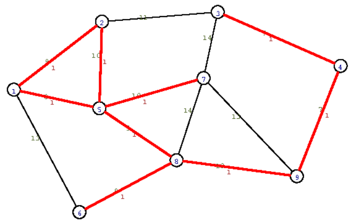
Trädet avsökt. Optimallösning: $x_1 = 14$, $x_2 = 7$, $z = 56$. I ord: Bygg 14 små hus och 7 större hus.

Uppgift 4

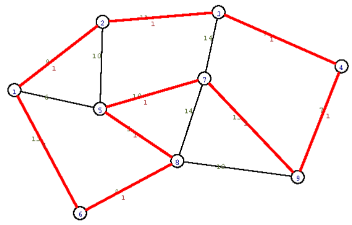
4a: Finn billigaste uppspännande träd med Kruskals eller Prims metod, vilket ger $z = 63$.



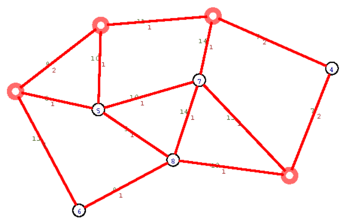
4b: Handelsresandeproblem. Undre gräns hittas med billigaste 1-träd, kostnad 73.



För att få en tillåten lösning kan man notera att nod 4 och 6 har valens 2, så alla bågar som ansluter till dessa två noder måste vara med i lösningen. En girig heuristik med dessa begräsningar kan ge lösningen 1-2-3-4-9-7-5-8-6-1, med kostnaden 84. Vi får alltså övre gräns 84 och undre gräns 73, så lösningen ligger högst 11 från optimum.



4c: Det är ett kinesiskt brevbärarproblem. Noderna 1, 2, 3 och 9 har udda valens, och det billigaste sättet att få jämn vales är att dubblera bågarna (1,2), (3,4) och (4,9). Kostnaden för turen blir $138 + 23 = 161$. En optimal tur är 1-2-5-1-2-3-4-9-4-3-7-9-8-7-5-8-6-1.



Graf 2, som är en handelsresandetur, är mycket enkelt att snöröja. Det är bara att följa rundturen (en gång). Ingen båge passeras mer än en gång.

Graf 1, som är ett träd, är jobbigare att snöröja, eftersom man kan förvänta sig många noder med valens ett, vilket gör att många bågar måste passeras mer än en gång. Det är inte så svårt att hitta billigaste vägen mellan två noder, eftersom det bara finns en väg, men att hitta det billigaste sättet att höja alla valenser till jämna är fortfarande ett matchingsproblem. Så det är sannolikt jobbigare att lösa problemet i graf 1 än i graf 3.

Uppgift 5

5a: Startlösningen är tillåten och ger att basbågarna är (1,5), (2,3), (5,3), (5,6), (7,8), (8,4) samt t.ex. (3,4) Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 15$, $y_3 = 30$, $y_4 = 47$, $y_5 = 13$, $y_6 = 31$, $y_7 = 15$, $y_8 = 30$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{12} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{58} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{75} = 15 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{64} = -5 < 0$ (optimalt ty $x = u$). Alla optimalitetsvillkor är uppfyllda, så lösningen är optimal.

(Om man skulle välja en annan startbasbåge än (3,4), kan man behöva göra en degenererad iteration, dvs. med flödesändring noll, men med basbyte, för att bevisa optimalitet.)

5b: Nu fås $\hat{c}_{57} = 1 + 13 - 15 = -1 < 0$, inte optimalt. Vi får x_{57} som inkommande variabel, att öka. Cykeln blir 5-7-8-4-3-5, och maximal ändring blir 2, pga. båge (8,4) (eller (7,8)), så vi väljer (8,4) som utgående. De nodpriser som ändras är $y_7 = 14$ och $y_8 = 29$, och de förändrade reducerade kostnaderna blir $\hat{c}_{58} = 2 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{75} = 14 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{84} = -1 < 0$ (optimalt ty $x = u$). Alla optimalitetsvillkor är uppfyllda, så lösningen är optimal.

5c: Låt nod 9 vara nya noden. Finn maxflöde från nod 9 till nod 4. Starta med flöde noll. Lösningsgång: Sök maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får t.ex. vägen 9-2-3-4, med kapacitet 7. Skicka 7 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (2,3) blir full.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får nu t.ex. vägen 9-1-5-8-4, med kapacitet 7. Skicka 7 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Bågarna (1,5) och (8,4) blir fulla.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får nu vägen 9-7-5-6-4, med kapacitet 6. Skicka 6 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Bågarna (7,5) och (6,4) blir fulla.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får nu vägen 9-7-8-5-3-4, med kapacitet 1. Skicka 1 enhet och ändra tillåtna riktningar. (Båge (3,4) blir full.) I nästa iteration kan man i Dijkstras metod märka alla noder utam 4, så minsnittet går över bågarna (3,4), (6,4) och (8,4). Maxflödet är 21.

Uppgift 6

6a: Billigaste väg, lös med Dijkstras metod. Lösningen ger nodpriser (gångtid) för alla noderna. Vi får nodpriser och föregångare $y_1 = 0$, $y_2 = 11$, $p_2 = 1$, $y_3 = 25$, $p_3 = 2$, $y_4 = 16$, $p_4 = 6$, $y_5 = 8$, $p_5 = 1$, $y_6 = 11$, $p_6 = 5$, $y_7 = 13$, $p_7 = 1$, $y_8 = 19$, $p_8 = 5$, $y_9 = 14$, $p_9 = 6$, $y_{10} = 20$, $p_{10} = 7$ Det högsta nodpriset är $y_{10} = 20$, så det tar alltså 20 minuter att gå dit. Vägen är 1-7-10.

6b: Vi har $y_7 = 13$, så den nya bågen skulle ge $y_9 = 14$, vilket är en förbättring. Den maximala tiden minskar med 6 minuter.

Uppgift 7

7a: Efter första steget fås $\alpha = (5, 7, 8, 4, 5)$ och $\beta = (1, 21, 0, 11, 7)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 2 och 3, samt kolumn 3, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (6, 7, 8, 5, 6)$ och $\beta = (1, 21, -1, 11, 7)$. Nu kan man stryka alla nollor genom att stryka rad 2 och 5, samt kolumn 2 och 3, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (7, 7, 9, 6, 6)$ och $\beta = (1, 20, -2, 11, 7)$. Man kan nu inte stryka alla nollor med färre än 5 streck. Man får t.ex. lösningen $x_{12} = 1$, $x_{25} = 1$, $x_{34} = 1$, $x_{43} = 1$, $x_{51} = 1$, och total kostnad blir 72. Optimal duallösning är $\alpha = (7, 7, 9, 6, 6)$ och $\beta = (1, 20, -2, 11, 7)$. Summering av duallösningen ger 72, så starka dualsatsen är uppfylld.

7b: Alla kostnadskoefficienter i rad 1 ökar med 2, i rad 2 med 3, i rad 3 med 2 och i rad 5 med 1. Duala optimallösningen förändras då genom att α_1 ökas med 2, α_2 ökas med 3, α_3 ökas med 2, α_5 ökas med 1. Optimal duallösning är alltså nu $\alpha = (9, 10, 11, 6, 7)$ och $\beta = (1, 20, -2, 11, 7)$. Den primala optimallösningen förändras ej. Den totala kostnaden ökar med $2 + 3 + 2 + 1 = 8$.