Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

TAOP88
Lösning till tentamen
2022-03-23

Lösningar

Uppgift 1

1a: Inför slackvariabler x_4, x_5 och x_6. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	-10	-8	-7	0	0	0	0
x_4	0	5	5	5	1	0	0	100
x_5	0	4	2	2	0	1	0	70
x_6	0	4	4	2	0	0	1	50

Först fås x_1 som inkommande variabel och x_6 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	0	2	-2	0	0	2.5	125
x_4	0	0	0	2.5	1	0	-1.25	37.5
x_5	0	0	-2	0	0	1	-1	20
x_1	0	1	1	0.5	0	0	0.25	12.5

Därefter fås x_3 som inkommande variabel och x_4 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	0	2	0	0.8	0	1.5	155
x_3	0	0	0	1	0.4	0	-0.5	15
x_5	0	0	-2	0	0	1	-1	20
x_1	0	1	1	0	-0.2	0	0.5	5

Nu är tablån optimal. Optimallösningen blir $x_1 = 5$, $x_2 = 0$, $x_3 = 15$, (samt $x_4 = 0$, $x_5 = 20$ och $x_6 = 0$) med $z = 155$. Optimallösningen är unik, eftersom ingen icke-basvariabel har reducerad kostnad noll. Bivillkor 1 och 3 är aktiva, eftersom slack-variablerna är noll. Duallösningen läses av i målfunktionsraden under slackvariablerna: $y_1 = 0.8$, $y_2 = 0$, $y_3 = 1.5$, $v = 155$.

Svar i ord: Lösningen är att göra (påsar för) 5 hyllor av sort 1 och 15 av sort 3. Vinsten blir 155. Alla skruvar och muttrar går åt, men det blir 20 brickor över.

1b: Skuggpriserna är lika med duallösningen (0.8, 0, 1.5), och anger hur mycket man skulle vinna på att öka högerledet med en enhet. Att öka tillgången på muttrar (bivillkor 3) ger mest vinstökning.

1c: Ny variabel x_7. Reducerad kostnad: $\hat{c}_7 = c_7 - a_7^T y = c_7 - 10y_1 - 10y_2 - 10y_3 = c_7 - 8 - 15 = c_7 - 23 > 0$ om $c_7 > 23$. Vinsten skulle alltså behöva vara större än 23 för att denna hyllsort ska vara lönsam att ta med.

Uppgift 2

2a: Startlösningen är tillåten och ger att basbågarna är (1,3), (2,5), (3,4), (5,4), (7,4) samt någon båge som ansluter till nod 6, jag väljer (1,6). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 14$, $y_3 = 8$, $y_4 = 23$, $y_5 = 18$, $y_6 = 7$, $y_7 = 14$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{35} = 4 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{62} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{65} = -4 < 0$ (optimalt ty $x = u$). Alla optimalitetsvillkor är uppfyllda, så lösningen är optimal.

2b: Nu fås $\hat{c}_{65} = 7 + 20 - 18 = 9 > 0$, inte optimalt. Vi får x_{65} som inkommande variabel, att minska. Cykeln blir 5-6-1-3-7-4-5, och maximal ändring blir 3, pga. båge (1,3), (3,7), (7,4) eller (5,4), så vi har många utgående bågar att välja på. Jag väljer (5,4). De nodpriser som ändras är $y_2 = 23$ och $y_5 = 27$, och de reducerade kostnaderna blir $\hat{c}_{35} = -4 < 0$ (inte optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{54} = 9 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{62} = -8 < 0$ (inte optimalt ty $x = 0$),

Vi väljer x_{62} som inkommande variabel, att öka. Cykeln blir 6-2-5-6, och maximal ändring blir 1, pga. båge (6,5), vilken blir utgående. De nodpriser som ändras är $y_2 = 15$ och $y_5 = 19$, och de reducerade kostnaderna blir $\hat{c}_{35} = 3 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{54} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{65} = 8 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Alla optimalitetsvillkor är uppfyllda, så lösningen är optimal.

2c: Finn maxflöde från nod 1 till nod 4. Starta med flöde noll. Lösningsgång: Sök maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 1-3-5-4, med kapacitet 4. Skicka 4 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Alla bågarna längs vägen blir fulla.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får nu vägen 1-6-2-5-3-7-4, med kapacitet 4. Skicka 4 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Alla bågarna längs vägen blir fulla, förutom (3,5) som blir tom.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi kan bara märka nod 1, så minsnittet går över bågarna (1,3) och (1,6). Maxflödet är 8.

Uppgift 3

3a: De hörnpunkter som har minst en koordinat lika med noll ger ju en bokhylla med yta noll och plats för noll böcker. Inte bra. Kvar att kolla är bara punkterna (10,10) och (6,12).

Skriv problemet på standardform för att applicera KKT-villkoren.
$g_1(x) = x_1 + 2x_2 - 30 \leq 0$, $g_2(x) = -2x_1 + x_2 \leq 0$, $g_3(x) = x_1 - 10 \leq 0$, $g_4(x) = -x_1 \leq 0$, $g_5(x) = x_2 - 18 \leq 0$, $g_6(x) = -x_2 \leq 0$, $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 16 \\ 4x_2 - 60 \end{pmatrix}$, $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_4(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_5(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_6(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

För punkt (10, 10):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 2, 4, 5 och 6 är inte aktiva, så $u_2 = u_4 = u_5 = u_6 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} 4 \\ -20 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $u_1 + u_3 = -4$ och $2u_1 = 20$. Vi får $u_1 = 10$ och $u_3 = -14$. KKT4 är inte

uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

För punkt (6, 12):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 3, 4, 5 och 6 är inte aktiva, så $u_3 = u_4 = u_5 = u_6 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -4 \\ -12 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $u_1 - 2u_2 = 4$ och $2u_1 + u_2 = 12$, vilket ger $u_1 = 28/5$ och $u_2 = 4/5$, så KKT4 är uppfyllt. Punkten är en KKT-punkt.

Alla bivillkor är linjära och målfunktionen består av summan av konvexa delar, så problemet är konvext. Därför är KKT-punkten (6,12) också optimal.

3b: I startpunkten är bivillkor 2, 4 och 6 aktiva. Första LP-problemet blir
$$\min z = -16d_1 - 60d_2 \text{ då } -2d_1 + d_2 \leq 0, 0 \leq d \leq 1,$$
vilket har optimallösning $d = (1, 1)$ med $z = -76$. Sätt $x^{(2)} = (t, t)$. Maximal steglängd blir 10. Linjesökning ger $t = 38/3 > 10$, så vi får $t = 10$ och $x^{(2)} = (10, 10)$.

Nu är bivillkor 1 aktivt. LP-problemet blir
$$\min z = 4d_1 - 20d_2 \text{ då } d_1 + 2d_2 \leq 0, \text{ samt } -1 \leq d \leq 1,$$
vilket har optimallösning $d = (-1, 0.5)$ med $z = -14$. Sätt $x^{(3)} = (10 - t, 10 + 0.5t)$. Maximal steglängd blir 4. Linjesökning ger $t = 14/3 > 4$, så vi får $t = 4$ och $x^{(2)} = (6, 12)$.

Nu är bivillkor 1 och 2 aktiva. LP-problemet blir
$$\min z = -4d_1 - 12d_2 \text{ då } d_1 + 2d_2 \leq 0, \ -2d_1 + d_2 \leq 0, \text{ samt } -1 \leq d \leq 1,$$
vilket har optimallösning $d = (0, 0)$ med $z = 0$. Alltså är $x = (6, 12)$ optimal.

3c: Lagrangerelaxationen:
$\varphi(u) = \min_{0 \leq x_1 \leq 10, 0 \leq x_2 \leq 18} x_1^2 + 2x_2^2 - 16x_1 - 60x_2 + u_1(x_1 + 2x_2 - 30) + u_2(-2x_1 + x_2) = x_1^2 + 2x_2^2 + (u_1 - 2u_2 - 16)x_1 + (2u_1 + u_2 - 60)x_2 - 30u_1$

Minimum kan fås genom att sätta gradienten av Lagrangefunktionen lika med noll, vilket ger $2x_1 + u_1 - 2u_2 - 16 = 0$ och $4x_2 + 2u_1 + u_2 - 60 = 0$, dvs. $x_1 = 8 - u_1/2 - u_2$ och $x_2 = 15 - u_1/2 - u_2/4$, förutsatt att dessa punkter ligger i det tillåtna området $0 \leq x_1 \leq 10$ och $0 \leq x_2 \leq 18$. Annars hamnar på närmaste gräns.

För $u = (0, 0)$ får vi $x_1 = 8$ och $x_2 = 15$, med $\varphi(0, 0) = -514$. Undre gräns: -514. Punkten är inte tillåten, och ger ingen övre gräns.

För $u = (6, 0)$ får vi $x_1 = 5$ och $x_2 = 12$, med $\varphi(6, 0) = -493$. Undre gräns ökar till -493. Punkten är inte tillåten, och ger ingen övre gräns.

För $u = (3, 3)$ får vi $x_1 = 9.5$ och $x_2 = 12.75$, med $\varphi(3, 3) = -505.375$. Undre gräns ändras ej. Punkten är inte tillåten, och ger ingen övre gräns.

Vi får ingen övre gräns, och den undre gränsen är -493. Eftersom de angivna värden på u inte ger någon tillåten lösning, är de för små. (Exempelvis ger $u = (6, 2)$ en tillåten lösning.)

Uppgift 4

Handelsresandeproblem. Undre gräns hittas med billigaste 1-träd, kostnad 43.

För att få en tillåten lösning kan man notera att nod 1 och 6 har valens 2, så alla bågar som ansluter till dessa två noder måste vara med i lösningen. En tillåten lösning är 1-2-4-5-6-8-7-3-9-1, med kostnaden 52. Detta ger övre gräns 52 och undre gräns 43, så lösningen ligger högst 9 från optimum.

Uppgift 5

5a: Billigaste väg, lös med Dijkstras metod. Billigaste vägen: 1-2-6-5-8-9, kostnad 31.

5b: Vi har $y_8 = 25$ och $y_4 = 13$, så en båge (4,8) med $c_{48} = 8$ skulle sänka y_8 till 21, och därmed y_9 till 27, så ja, det skulle gå 4 tidsenheter snabbare.

Uppgift 6

P0: LP-optimum: $x_1 = 1.5$, $x_2 = 3$, $z = 16.5$. Detta ger $\bar{z} = 16$. Vi förgrenar över x_1.

P1 = P0 +($x_1 \leq 1$).
P2 = P0 +($x_1 \geq 2$).

P1: LP-optimum: $x_1 = 1$, $x_2 = 3$, $z = 14$. En tillåten heltalslösning, så vi får $\underline{z} = 14$. Spara lösningen och kapa grenen.

P2: LP-optimum: $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $z = 16$. En tillåten heltalslösning, så vi får $\underline{z} = 16$. Spara lösningen och kapa grenen.

Trädet avsökt. Optimallösning: $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $z = 16$. I ord: Köp två av varje sort.

Uppgift 7

Det är ett kinesiskt brevbärarproblem. Noderna 2, 3, 4 och 7 har udda valens, och det billigaste sättet att få jämn vales är att dubblera bågarna (2,4) och (3,7). Kostnaden för turen blir $68 + 13 = 81$. En optimal tur är 1-8-7-3-4-5-6-2-4-2-1-3-7-1.

Uppgift 8

Efter första steget fås $\alpha = (3, 4, 4, 4, 5)$ och $\beta = (0, 0, 0, 1, 2)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 2, samt kolumn 1, 3 och 5, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (4, 4, 5, 5, 6)$ och $\beta = (-1, 0, -1, 1, 1)$. Man kan nu inte stryka alla nollor med färre än 5 streck. Man får t.ex. lösningen $x_{12} = 1$, $x_{24} = 1$, $x_{31} = 1$, $x_{43} = 1$, $x_{55} = 1$, och total kostnad blir 24. Optimal duallösning är $\alpha = (4, 4, 5, 5, 6)$ och $\beta = (-1, 0, -1, 1, 1)$. Summering av duallösningen ger 24, så starka dualsatsen är uppfylld.

Uppgift 9

1a: Modell:
Bivillkor:

$$\begin{array}{ll} x_1 + x_2 \leq 1 & (1) \\ x_3 + x_4 + x_5 \leq 2 & (2) \\ x_3 \leq x_1 & (3) \\ x_2 \leq x_4 & (4) \\ x_4 = x_5 & (5) \\ x_j \in 0, 1 \forall j & \end{array}$$

Målfunktion: max $c^T x = 7x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 + 3x_5$

Bivillkor 5 hanteras enklast genom att slå ihop variablerna x_4 och x_5. Låt $x_6 = 1$ om $x_4 = 1$ och $x_5 = 1$, och $x_6 = 0$ om $x_4 = 0$ och $x_5 = 0$. Modell blir då:

$$\begin{array}{ll} x_1 + x_2 \leq 1 & (1) \\ x_3 + 2x_6 \leq 2 & (2) \\ x_3 \leq x_1 & (3) \\ x_2 \leq x_6 & (4) \\ x_j \in 0, 1 \forall j & \end{array}$$

Målfunktion: max $c^T x = 7x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 6x_6$

1b: Först fås inga fixeringar, så vi förgrenar över x_1.
P1: $x_1 = 1$. P2: $x_1 = 0$.

P1: $x_1 = 1$ ger $x_2 = 0$ i (1). Sedan inga fler fixeringar. Förgrena över x_3.
P3: $x_1 = 1$. $x_3 = 1$. P4: $x_1 = 1$. $x_3 = 0$.

P3: $x_3 = 1$ ger $x_6 = 0$ i (2). Allt fixerat. Kapa grenen. Är lösningen tillåten? Ja. Notera målfunktionsvärdet: $\underline{z} = 11$. Målfunktionsbivillkoret (0) blir $7x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 6x_6 \geq 12$.

P4: Ingen fixering. Förgrena över x_6.
P5: $x_1 = 1$. $x_3 = 0$. $x_6 = 1$. P6: $x_1 = 1$. $x_3 = 0$.

P5: Allt fixerat. Kapa grenen. Är lösningen tillåten? Ja. Notera målfunktionsvärdet: $\underline{z} = 13$. Målfunktionsbivillkoret (0) blir $7x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 6x_6 \geq 14$.

P6: Villkor (0) kan ej uppfyllas. Kapa.

P2: $x_1 = 0$ ger $x_3 = 0$ i (3). Villkor (0) kan ej uppfyllas. Kapa.

Trädet avsökt. Optimum funnet i P5: $x_1 = 1$. $x_3 = 0$. $x_3 = 0$. $x_6 = 1$. $z = 13$. Svar i ord: Satsa på produkt 1, 4 och 5.