Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

TAOP88
Lösning till tentamen
2022-08-26

Lösningar

Uppgift 1

1a: Inför slackvariabler x_4, x_5, x_6 och x_7. Starta med slackvariablerna i basen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	-1	-1	-1	0	0	0	0	0
x_4	0	10	10	8	1	0	0	0	100
x_5	0	10	0	5	0	1	0	0	30
x_6	0	0	5	3	0	0	1	0	20
x_7	0	10	15	7	0	0	0	1	120

Först fås x_1 som inkommande variabel och x_5 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	0	-1	-1/2	0	1/10	0	0	3
x_4	0	0	10	3	1	-1	0	0	70
x_1	0	1	0	1/2	0	1/10	0	0	3
x_6	0	0	5	3	0	0	1	0	20
x_7	0	0	15	2	0	-1	0	1	90

Därefter fås x_2 som inkommande variabel och x_6 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	0	0	1/10	0	1/10	1/5	0	7
x_4	0	0	0	-3	1	-1	-2	0	30
x_1	0	1	0	1/2	0	1/10	0	0	3
x_2	0	0	1	3/5	0	0	1/5	0	4
x_7	0	0	0	-7	0	-1	-3	1	30

Nu är tablån optimal. Optimallösningen blir $x_1 = 3$, $x_2 = 4$, $x_3 = 0$, (samt $x_4 = 30$, $x_5 = 0$, $x_6 = 0$ och $x_7 = 30$) med $z = 7$. Optimallösningen är unik, eftersom ingen icke-basvariabel har reducerad kostnad noll. Bivillkor 2 och 3 är aktiva, eftersom slackvariablerna är noll. Duallösningen läses av i målfunktionsraden under slackvariablerna: $y_1 = 0$, $y_2 = 1/10$, $y_3 = 1/5$, $y_4 = 0$, $v = 7$.

Svar i ord: Gör 3 påsar av blandning 1 och 4 påsar av blandning 2. Målfunktionsvärdet blir 7. Alla hallon och krusbär går åt, men det blir 30 jordgubbar och 30 björnbär över.

1b: Skuggpriserna är lika med duallösningen, och anger hur mycket man skulle vinna på att öka högerledet med en enhet. Att öka tillgången på krusbär (bivillkor 3) ger störst vinstökning.

1c: Ny variabel x_8. Reducerad kostnad: $\hat{c}_8 = c_8 - a_8^T y = 1 - 10y_1 - 10y_4 = 1 > 0$. Ja, det skulle bli fler påsar.

Uppgift 2

2a: Startlösningen är tillåten och ger att basbågarna är (1,6), (3,6), (3,7), (6,2), (6,5) och (7,4). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 15$, $y_3 = 4$, $y_4 = 19$, $y_5 = 14$, $y_6 = 7$, $y_7 = 10$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{13} = 2 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{25} = 5 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{35} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{54} = 0$ (optimalt). Alla optimalitetsvillkor är nu uppfyllda, så lösningen är optimal.

2b: Nu får vi $\hat{c}_{35} = -1 < 0$ (inte optimalt ty $x = 0$). Jag väljer x_{35} som inkommande, att öka. Cykeln blir 3-5-6-3, och maximal ändring blir 40. Det ger båge (3,6) som utgående. Nya nodpriser blir $y_1 = 0$, $y_2 = 15$, $y_3 = 5$, $y_4 = 20$, $y_5 = 14$, $y_6 = 7$, $y_7 = 11$, och reducerade kostnaderna $\hat{c}_{13} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{25} = 5 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{36} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{54} = -1 < 0$ (optimalt ty $x = u$). Alla optimalitetsvillkor är nu uppfyllda, så lösningen är optimal.

2c: Finn maxflöde från nod 1 till nod 5. Starta med flöde noll. Lösningsgång: Sök maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 1-3-5, med kapacitet 170. Skicka 170 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (1,3) blir full.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får nu vägen 1-6-2-5, med kapacitet 100. Skicka 100 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (6,2) blir full.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får nu vägen 1-6-5, med kapacitet 50. Skicka 50 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (1,6) blir full.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi kan bara märka nod 1, så minsnittet går över bågarna (1,3) och (1,6). Maxflödet är 320.

Uppgift 3

3a: De hörnpunkter som har minst en koordinat lika med noll ger ju att potatis och/eller sallad saknas, vilket han inte vill. Kvar att kolla är bara punkterna (4,1) och (2,3).

Skriv problemet på standardform för att applicera KKT-villkoren.
$g_1(x) = x_1 + x_2 - 5 \le 0$, $g_2(x) = -x_1 \le 0$, $g_3(x) = -x_2 \le 0$, $g_4(x) = x_1 - 4 \le 0$, $g_5(x) = x_2 - 3 \le 0$, $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 8x_1 - 16 \\ 4x_2 - 14 \end{pmatrix}$, $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_4(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_5(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

För punkt (4, 1):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 2, 3 och 5 är inte aktiva, så $u_2 = u_3 = u_5 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} 16 \\ -10 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $u_1 + u_4 = -16$ och $u_1 = 10$. Vi får $u_1 = 10$ och $u_4 = -26$. KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

För punkt (2, 3):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 2, 3 och 4 är inte aktiva, så $u_2 = u_3 = u_4 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_5 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $u_1 = 0$ och $u_1 + u_5 = 2$, vilket ger $u_1 = 0$ och $u_5 = 2$, så KKT4 är uppfyllt.

Punkten är en KKT-punkt.

Alla bivillkor är linjära, så det tillåtna området är konvext. Målfunktionen är konvex, så hela problemet är konvext. KKT-villkoren visar då att punkt (2,3) är optimal.

3b: I startpunkten är bivillkor 2 och 3 aktiva. Första LP-problemet blir
$\min z = -16d_1 - 14d_2$ då $0 \leq d \leq 1$,
vilket har optimallösning $d = (1,1)$ med $z = -4$. Sätt $x^{(2)} = (t,t)$. Maximal steglängd blir 2.5. Mimimum längs denna linje ger också $t = 2.5$, så vi får $t = 2.5$, vilket ger $x^{(2)} = (2.5, 2.5)$.

Nu är bara bivillkor 1 aktivt. LP-problemet blir
$\min z = 4d_1 - 4d_2$ då $d_1 + d_2 \leq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$,
vilket har optimallösning $d = (-1,1)$ med $z = -8$. Sätt $x^{(3)} = (2.5-t, 2.5+t)$. Maximal steglängd blir 0.5. Linjesökning ger $t = 2/3 > 0.5$, så vi får $t = 0.5$ och $x^{(2)} = (2,3)$.

Nu är bivillkor 1 och 5 aktiva. LP-problemet blir
$\min z = -2d_2$ då $d_1 + d_2 \leq 0$, $d_2 \leq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$,
vilket har optimallösning $d = (0,0)$ med $z = 0$. Alltså är punkten $x = (2,3)$ optimal.

3c: Lagrangerelaxationen:
$\varphi(u) = \min_{0\leq x_1 \leq 4, 0 \leq x_2 \leq 3} 4x_1^2 + 2x_2^2 - 16x_1 - 14x_2 + u(x_1 + x_2 - 5) = 4x_1^2 + 2x_2^2 + (u-16)x_1 + (u-14)x_2 - 5u$.

Minimum kan fås genom att sätta gradienten av Lagrangefunktionen lika med noll, vilket ger $8x_1 + u - 16 = 0$ och $4x_2 + u - 14 = 0$, dvs. $x_1 = 2 - u/8$ och $x_2 = 7/2 - u/4$, förutsatt att dessa punkter ligger i det tillåtna området $0 \leq x_1 \leq 4$ och $0 \leq x_2 \leq 3$. Annars hamnar man på närmaste gräns.

För $u = 0$ får vi $x_1 = 2$ och $x_2 = 3$ (ty $7/2 > 3$), med $\varphi(0) = -40$. Undre gräns: -40. Punkten är tillåten, och ger övre gräns -40.

För $u = 1$ får vi $x_1 = 15/8$ och $x_2 = 3$, med $\varphi(1) \approx -40.06$. Undre gräns ändras ej. Punkten är tillåten, och ger övre gräns -39.9375

För $u = 2$ får vi $x_1 = 7/4$ och $x_2 = 3$, med $\varphi(2) = -40.25.25$. Undre gräns ändras ej. Punkten är tillåten, och ger övre gränsen -39.75.

Vi får bästa övre och undre gräns lika med -40, och $u = 0$ är faktiskt optimal. (När man ökar u blir båda gränserna sämre.)

Uppgift 4

4a: Det är ett kinesiskt brevbärarproblem. Noderna 1, 2, 5 och 6 har udda valens, och det billigaste sättet att få jämn valens är att dubblera bågarna (1,6), (2,4) och (4,5). Kostnaden för turen blir $53 + 14 = 67$. En optimal tur är 1-2-3-5-4-2-4-6-7-5-4-1-6-1.

4b: Handelsresandeproblem. Undre gräns hittas med billigaste 1-träd, kostnad 33.

För att få en tillåten lösning kan man notera att nod 3 och 7 har valens 2, så alla bågar som ansluter till dessa två noder måste vara med i lösningen. En tillåten lösning som kan fås med närmaste-granne, med ovanstående begränsning, är 1-4-2-3-5-7-6-1, med kostnaden 36. Detta ger övre gräns 36 och undre gräns 33, så lösningen ligger högst 3 från optimum.

4c: Eftersom alla noder ska undersökas är den totala tiden för detta konstant, och påverkas inte av vilken väg man väljer.

Uppgift 5

5a: Billigaste väg, lös med Dijkstras metod. Billigaste vägen: 1-3-5-7, kostnad 13.

5b: Vi har $y_7 = 13$ och $y_6 = 9$, och båge (6,7) har kostnad 6, så totaltiden via nod 6 blir 15, vilket är 2 mer än den bästa.

Uppgift 6

6a: P0: LP-optimum: $x_1 = 1.2$, $x_2 = 1.1$, $z = 10.4$. Detta ger $\bar{z} = 10$. Vi förgrenar över x_1.

P1 = P0 $+(x_1 \leq 1)$.
P2 = P0 $+(x_1 \geq 2)$.

P1: LP-optimum: $x_1 = 1$, $x_2 = 1.25$, $z = 10$, vilket ger ger $\bar{z} = 10$. Förgrena över x_2.

P3 = P1 $+(x_2 \leq 1)$.
P4 = P1 $+(x_2 \geq 2)$.

P3: LP-optimum: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $z = 9$. En tillåten heltalslösning, så vi får $\underline{z} = 9$. Spara lösningen och kapa grenen.

P4: LP-optimum: $x_1 = 0$, $x_2 = 2$, $z = 8$. Kapa, ty $\underline{z} = 9$.

P2: Saknar tillåten lösning. Kapa.

Trädet avsökt. Optimallösning: $x_1 = 1$, $x_2 = 1$, $z = 9$. I ord: Plantera en av varje sort.

6b: Inget av bivillkoren är aktivt i optimum.

6c: Lägg till bivillkor $2y \leq x_2 \leq 3y$ där $y \in \{0, 1\}$.

Uppgift 7

7a: Efter första steget fås $\alpha = (13, 5, 4, 4, 8)$ och $\beta = (0, 0, 0, 0, 1)$. Man kan inte stryka alla nollor med färre än fem streck, och får lösningen $x_{15} = 1$, $x_{21} = 1$, $x_{32} = 1$, $x_{43} = 1$, $x_{54} = 1$, och total kostnad blir 35. Optimal duallösning är $\alpha = (13, 5, 4, 4, 8)$ och $\beta = (0, 0, 0, 0, 1)$. Summering av duallösningen ger 35, så starka dualsatsen är uppfylld.

7b: α_1 ökar med 4 och α_5 ökar med 3. Samma primallösning är fortfarande optimal. Optimala målfunktionsvärdet ökar med 7.