Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

TAOP88
Lösning till tentamen
2022-10-24

Lösningar

Uppgift 1

1a: Som anges i uppgiften startar man med x_1, x_2, x_3 och x_4 som basvariabler, och det angivna uttrycket för målfunktionen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	0	0	0	0	-1.5	-7.5	1245
x_1	0	1	0	0	0	0.2	0	12
x_2	0	0	1	0	0	0.3	0.5	17
x_3	0	0	0	1	0	0.5	0	20
x_4	0	0	0	0	1	0	0.5	15

Först fås x_6 som inkommande variabel och x_4 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	0	0	0	15	-1.5	0	1470
x_1	0	1	0	0	0	0.2	0	12
x_2	0	0	1	0	-1	0.3	0	2
x_3	0	0	0	1	0	0.5	0	20
x_6	0	0	0	0	2	0	1	30

Därefter fås x_5 som inkommande variabel och x_2 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	0	5	0	10	0	0	1480
x_1	0	1	-0.667	0	0.667	0	0	10.667
x_5	0	0	3.333	0	-3.333	1	0	6.667
x_3	0	0	-1.667	1	1.667	0	0	16.667
x_6	0	0	0	0	2	0	1	30

Nu är tablån optimal. Optimallösningen blir $x_1 = 10.667$, $x_2 = 0$, $x_3 = 16.667$, $x_4 = 0$, $x_5 = 6.667$, $x_6 = 30$ med $z = 1480$. Duallösningen läses av i målfunktionsraden under startbasvariablerna (med hjälp av ledningen i uppgiften). $y_1 = 2$, $y_2 = 2$, $y_3 = 3$, $y_4 = 2$, $v = 1480$.

Svar i ord: Gör 10.667 buntar av blandning 1, 16.667 buntar av blandning 3, 6.667 buntar av blandning 5 och 30 buntar av blandning 6. Palrik tjänar 1480 kr.

1b: Skuggpriserna är lika med duallösningen, och anger hur mycket man skulle vinna på att öka högerledet med en enhet. Lite fler Kalle Anka skulle ge störst vinstökning.

1c: Ny variabel x_7. Reducerad kostnad: $\hat{c}_7 = c_7 - a_7^T y = 45 - 5y_1 - 5y_2 - 5y_3 - 5y_4 = 45 - 10 - 10 - 15 - 10 = 0$. Nej, det skulle inte ge större vinst.

1d: Det nya målfunktionsuttrycket fås som den ursprungliga målfunktionen minus 2 gånger bivillkor 1 minus 1.5 gånger bivillkor 2 minus 3 gånger bivillkor 3 minus bivillkor 4.

Uppgift 2

2a: Startlösningen är tillåten och ger att basbågarna är (1,4), (2,3), (2,5), (3,4) och (4,6). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = -14$, $y_3 = -2$, $y_4 = 8$, $y_5 = -1$, $y_6 = 15$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{13} = 10 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{35} = 13 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{45} = 20 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{65} = 22 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Alla optimalitetsvillkor är nu uppfyllda, så lösningen är optimal.

2b: Nu får vi $\hat{c}_{56} = -10 < 0$ (inte optimalt ty $x = 0$). Välj x_{56} som inkommande, att öka. Cykeln blir 5-6-4-3-2-5, och maximal ändring blir 5. Totalkostnaden sänks nu med $10 * 5 = 50$. Det ger båge (3,4) (eller (2,3)) som utgående. Nya nodpriser blir $y_1 = 0$, $y_2 = -4$, $y_3 = 8$, $y_4 = 8$, $y_5 = 9$, $y_6 = 15$, och reducerade kostnaderna $\hat{c}_{13} = 0$ (optimalt), $\hat{c}_{34} = 10 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{35} = 13 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{45} = 10 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Alla optimalitetsvillkor är nu uppfyllda, så lösningen är optimal. Totalkostnaden har sänks med 50.

2c: Finn maxflöde från nod 1 till nod 6. Starta med flöde noll.

För nätverket i uppgift a: Sök maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 1-4-6, med kapacitet 25. Skicka 25 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Bågarna (1,4) och (4,6) blir fulla.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi kan nu märka alla noder utom 6 (och 2), så minsnittet går över bågarna (4,6) och (6,5) baklänges. Maxflödet är 25.

För nätverket i uppgift b: Gör första iterationen som ovan. I andra iterationen fås vägen 1-3-4-5-6, med kapacitet 25. Skicka 25 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Alla bågarna längs vägen blir fulla.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi kan bara märka nod 1, så minsnittet går över bågarna (1,3) och (1,4). Maxflödet är 50.

Uppgift 3

3a: De hörnpunkter som har minst en koordinat lika med noll ger ju golvarea noll, vilket knappast är optimalt. Kvar att kolla är bara punkterna (4,1) och (2,3).

Skriv problemet på standardform för att applicera KKT-villkoren.
$g_1(x) = -x_1 \leq 0$, $g_2(x) = -x_2 \leq 0$, $g_3(x) = x_1 - 4 \leq 0$, $g_4(x) = x_2 - 3 \leq 0$, $g_5(x) = x_1 + x_2 - 5 \leq 0$, $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 10x_1 - 20 \\ 6x_2 - 24 \end{pmatrix}$, $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_3 x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_4(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_5(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

För punkt (4, 1):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 1, 2 och 4 är inte aktiva, så $u_1 = u_2 = u_4 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} 20 \\ -18 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $u_3 + u_5 = -20$ och $u_5 = 18$. Vi får $u_3 = -38$ och $u_5 = 18$. KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

För punkt (2, 3):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 1, 2 och 3 är inte aktiva, så $u_1 = u_2 = u_3 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} 0 \\ -6 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $u_5 = 0$ och $u_4 + u_5 = 6$, vilket ger $u_4 = 6$ och $u_5 = 0$, så KKT4 är uppfyllt. Punkten är en KKT-punkt.

Alla bivillkor är linjära, så det tillåtna området är konvext. Målfunktionen är konvex, så hela problemet är konvext. KKT-villkoren visar då att punkt (2,3) är optimal.

3b: I startpunkten är bara ickenegativitetsvillkoren aktiva. Första LP-problemet blir
$\min z = -20d_1 - 24d_2$ då $0 \leq d \leq 1$,
vilket har optimallösning $d = (1, 1)$ med $z = -44$. Sätt $x^{(2)} = (t, t)$. Maximal steglängd blir 2.5. Mimimum längs denna linje ger $t > 7$, så vi får $t = 2.5$, vilket ger $x^{(2)} = (2.5, 2.5)$.

Nu är bara bivillkor 5 aktivt. LP-problemet blir
$\min z = 5d_1 - 9d_2$ då $d_1 + d_2 \leq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$,
vilket har optimallösning $d = (-1, 1)$ med $z = -14$. Sätt $x^{(3)} = (2.5 - t, 2.5 + t)$. Maximal steglängd blir 0.5. Linjesökning ger $t = 7/8 > 0.5$, så vi får $t = 0.5$ och $x^{(2)} = (2, 3)$.

Nu är bivillkor 4 och 5 aktiva. LP-problemet blir
$\min z = -6d_2$ då $d_1 + d_2 \leq 0$, $d_2 \leq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$,
vilket har optimallösning $d = (0, 0)$ med $z = 0$. Alltså är punkten $x = (2, 3)$ optimal.

3c: Lagrangerelaxationen:
$\varphi(u) = \min_{0 \leq x_1 \leq 4, 0 \leq x_2 \leq 4} 5x_1^2 + 3x_2^2 - 20x_1 - 24x_2 + u(x_1 + x_2 - 5) = 5x_1^2 + 3x_2^2 + (u - 20)x_1 + (u - 24)x_2 - 5u$.

Minimum kan fås genom att sätta gradienten av Lagrangefunktionen lika med noll, vilket ger $10x_1 + u - 20 = 0$ och $6x_2 + u - 24 = 0$, dvs. $x_1 = 2 - u/10$ och $x_2 = 4 - u/6$, förutsatt att dessa punkter ligger i det tillåtna området $0 \leq x_1 \leq 4$ och $0 \leq x_2 \leq 4$. Annars hamnar man på närmaste gräns.

För $u = 0$ får vi $x_1 = 2$ och $x_2 = 4$, med $\varphi(0) = -68$. Undre gräns: -68. Punkten är inte tillåten, så vi får ingen övre gräns.

För $u = 2$ får vi $x_1 = 9/5 = 1.8$ och $x_2 = 11/3 \approx 3.667$, med $\varphi(2) \approx -66.533$. Undre gräns ökar till -66.533. Punkten är inte tillåten, så vi får ingen övre gräns.

För $u = 4$ får vi $x_1 = 8/5 = 1.6$ och $x_2 = 10/3 \approx 3.333$, med $\varphi(4) = -66.133$. Undre gräns ökar till -66.133. Punkten är tillåten, och ger övre gränsen -65.867.

Vi får bästa undre gräns -66.133 och övre gräns -65.867. För $u = 4$ fås en tillåten lösning, med ganska liten marginal, så det optimala värdet på u ligger strax under 4.

Uppgift 4

4a: Det är ett handelsresandeproblem. Eftersom en nod har valens ett, har det normala handelsresandeproblemet ingen tillåten lösning. Man måste passera nod 3 två gånger för att nå nod 4. Om man tillåter återbesök, finns det en lösning. Eftersom en sådan lösning måste innehålla att man går fram och tillbaka i båge (3,4), kan vi fixera denna del av lösningen, och temporärt ta bort nod 4 och båge (3,4) ur problemet. Efteråt lägger vi till den delen och ökar kostnaden med 12.

Undre gräns hittas med billigaste 1-träd, kostnad 43.

För att få en tillåten lösning kan man helt enkelt byta båge (2,6) i 1-trädet mot båge (2,3). Då får alla noder valens två, och vi får en rundtur som kostar 44. Om vi lägger till den fixerade delen, får vi turen 1-2-3-4-3-5-6-7-1, med kostnaden 56. Undre gränsen blir 55, så lösningen ligger högst 1 från optimum.

4b: Eftersom varje rum ska undersökas en gång, är den totala tiden för detta konstant, och påverkas inte av vilken väg man väljer.

4c: Det är nu ett kinesiskt brevbärarproblem. Faktorn 20 är ointressant och påverkar inte vilken lösning som är bäst. Noderna 2, 3, 4 och 6 har udda valens, och det billigaste sättet att få jämn valens är att dubblera bågarna (2,6) och (3,4). Kostnaden för turen blir 74. En optimal tur är 1-2-3-4-3-5-6-2-6-7-1.

Uppgift 5

5a: Billigaste väg, lös med Dijkstras metod. Billigaste vägen: 1-2-5-7, kostnad 14.

5b: Vi har $y_6 = 13$ och $y_8 = 16$, så en väg till nod 6 blir en enhet kortare.

Uppgift 6

6a: P0: LP-optimum: $x_1 = 0$, $x_2 = 4.5$, $z = 13.5$. Detta ger $\bar{z} = 13$. Vi förgrenar över x_2.

P1 = P0 $+(x_2 \leq 4)$.
P2 = P0 $+(x_2 \geq 5)$.

P1: LP-optimum: $x_1 = 0.25$, $x_2 = 4$, $z = 13.25$, vilket ger ger $\bar{z} = 13$. Förgrena över x_1.

P3 = P1 $+(x_1 \leq 0)$.
P4 = P1 $+(x_1 \geq 1)$.

P3: LP-optimum: $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, $z = 12$. En tillåten heltalslösning, så vi får $\underline{z} = 12$. Spara lösningen och kapa grenen.

P4: LP-optimum: $x_1 = 1$, $x_2 = 2.5$, $z = 12.5$. Det ger $\bar{z} = 12$. Kapa, ty $\underline{z} = 12$.

P2: Saknar tillåten lösning. Kapa.

Trädet avsökt. Optimallösning: $x_1 = 0$, $x_2 = 4$, $z = 12$. I ord: Köp 4 små lådor.

6b: Inget av bivillkoren är aktivt i optimum.

Uppgift 7

7a: Efter första steget fås $\alpha = (5, 5, 4, 4, 4)$ och $\beta = (0, 2, 0, 0, 1)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 1, 2 och 5, samt kolumn 1, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (5, 5, 5, 5, 4)$ och $\beta = (-1, 2, 0, 0, 1)$. Nu kan man inte stryka alla nollor med färre än fem streck, och får (till exempel) lösningen $x_{14} = 1$, $x_{25} = 1$, $x_{31} = 1$, $x_{42} = 1$, $x_{53} = 1$, och total kostnad blir 26. Optimal duallösning är $\alpha = (5, 5, 5, 5, 4)$ och $\beta = (-1, 2, 0, 0, 1)$. Summering av duallösningen ger 26, så starka dualsatsen är uppfylld.

7b: Det hjälper inte. α_5 minskar med 2. Samma primallösning är fortfarande optimal. Optimala målfunktionsvärdet minskar med 2.