Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

TAOP88
Lösning till tentamen
2022-10-25

Lösningar

Uppgift 1

1a: Som anges i uppgiften startar man med x_1, x_2, x_3 och x_4 som basvariabler, och det angivna uttrycket för målfunktionen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	0	0	0	0	-7.5	-5	1140
x_1	0	1	0	0	0	0.2	0	15
x_2	0	0	1	0	0	0.3	0.5	17
x_3	0	0	0	1	0	0.5	0	20
x_4	0	0	0	0	1	0	0.5	15

Först fås x_5 som inkommande variabel och x_3 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	0	0	15	0	0	-5	1440
x_1	0	1	0	-0.4	0	0	0	7
x_2	0	0	1	-0.6	0	0	0.5	5
x_5	0	0	0	2	0	1	0	40
x_4	0	0	0	0	1	0	0.5	15

Därefter fås x_6 som inkommande variabel och x_2 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	0	10	9	0	0	0	1490
x_1	0	1	0	-0.4	0	0	0	7
x_6	0	0	2	-1.2	0	0	1	10
x_5	0	0	0	2	0	1	0	40
x_4	0	0	-1	0.6	1	0	0	10

Nu är tablån optimal. Optimallösningen blir $x_1 = 7$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, $x_4 = 10$, $x_5 = 40$, $x_6 = 10$ med $z = 1490$. Duallösningen läses av i målfunktionsraden under startbasvariablerna (med hjälp av ledningen i uppgiften). $y_1 = 2$, $y_2 = 2.5$, $y_3 = 2.7$, $y_4 = 1.5$, $v = 1490$.

Svar i ord: Gör 7 buntar av blandning 1, 10 buntar av blandning 4, 40 buntar av blandning 5 och 10 buntar av blandning 6. Palrik tjänar 1490 kr.

1b: Skuggpriserna är lika med duallösningen, och anger hur mycket man skulle vinna på att öka högerledet med en enhet. Lite fler Kalle Anka skulle ge störst vinstökning.

1c: Ny variabel x_7. Reducerad kostnad: $\hat{c}_7 = c_7 - a_7^T y = 44 - 5y_1 - 5y_2 - 5y_3 - 5y_4 = 44 - 10 - 12.5 - 16.5 - 7.5 = -2.5 < 0$. Nej, det skulle inte ge större vinst.

1d: Det nya målfunktionsuttrycket fås som den ursprungliga målfunktionen minus 2 gånger bivillkor 1 minus 1.5 gånger bivillkor 2 minus 1.8 gånger bivillkor 3 minus 1.5 gånger bivillkor 4.

Uppgift 2

2a: Startlösningen är tillåten och ger att basbågarna är (2,3) och (3,5), plus bågar som gör det sammanhängande. Jag väljer (1,3), (1,4) och (4,6). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = -4$, $y_3 = 8$, $y_4 = 8$, $y_5 = 22$, $y_6 = 15$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{25} = -13 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{34} = 10 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{45} = -3 < 0$ (ej optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{65} = -1 < 0$ (ej optimalt ty $x = 0$). Jag väljer x_{45} som inkommande. Cykeln blir 4-5-3-1-4, och maximal ändring blir noll. Båge (1,3) (eller (1,4)) blir utgående. Nya nodpriser blir $y_1 = 0$, $y_2 = -7$, $y_3 = 5$, $y_4 = 8$, $y_5 = 19$, $y_6 = 15$, och reducerade kostnaderna $\hat{c}_{13} = 3 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{25} = -13 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{34} = 7 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{65} = 2 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Alla optimalitetsvillkor är nu uppfyllda, så lösningen är optimal. Observera att flödet (eller totalkostnaden) inte är ändrat.

2b: Nu får vi $\hat{c}_{26} = -7 < 0$ (inte optimalt ty $x = 0$). Välj x_{26} som inkommande, att öka. Cykeln blir 2-6-4-5-3-2, och maximal ändring blir 5. Totalkostnaden sänks med $5 * 7 = 35$. Det ger båge (3,5) (eller (2,3)) som utgående. Nya nodpriser blir $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 12$, $y_4 = 8$, $y_5 = 19$, $y_6 = 15$, och reducerade kostnaderna $\hat{c}_{13} = -4 < 0$ (ej optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{25} = -6 > 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{34} = 14 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{35} = 7 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{65} = 2 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Jag väljer x_{13} som inkommande, att öka. Cykeln blir 1-3-2-6-4-1, och maximal ändring blir noll. Det ger båge (2,3) som utgående. Nya nodpriser blir $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 8$, $y_4 = 8$, $y_5 = 19$, $y_6 = 15$, och reducerade kostnaderna $\hat{c}_{23} = 4 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{25} = -6 > 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{34} = 10 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{35} = 3 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{65} = 2 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Alla optimalitetsvillkor är nu uppfyllda, så lösningen är optimal. Totalkostnaden har sänkts med 35.

2c: Finn maxflöde från nod 1 till nod 6. Starta med flöde noll.

För nätverket i uppgift a: Sök maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 1-4-6, med kapacitet 15. Skicka 15 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Bågarna (1,4) och (4,6) blir fulla.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi kan nu märka alla noder utom 6 (och 2), så minsnittet går över bågarna (4,6) och (6,5) baklänges. Maxflödet är 15.

För nätverket i uppgift b: Gör första iterationen som ovan. Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi kan nu märka alla noder utom 6 (och 2), så minsnittet går över bågarna (4,6) och (6,5) baklänges. Maxflödet är 15. Den nya bågen hjälpte inte.

Uppgift 3

3a: De hörnpunkter som har minst en koordinat lika med noll ger ju golvarea noll, vilket knappast är optimalt. Kvar att kolla är bara punkterna (4,1) och (2,3).

Skriv problemet på standardform för att applicera KKT-villkoren.
$g_1(x) = -x_1 \leq 0$, $g_2(x) = -x_2 \leq 0$, $g_3(x) = x_1 - 4 \leq 0$, $g_4(x) = x_2 - 3 \leq 0$, $g_5(x) = x_1 + x_2 - 5 \leq 0$, $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 10x_1 - 50 \\ 6x_2 - 24 \end{pmatrix}$, $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$,

$\nabla g_3 x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_4(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_5(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

För punkt (4, 1):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 1, 2 och 4 är inte aktiva, så $u_1 = u_2 = u_4 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -10 \\ -18 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $u_3 + u_5 = 10$ och $u_5 = 18$. Vi får $u_3 = -8$ och $u_5 = 18$. KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

För punkt (2, 3):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 1, 2 och 3 är inte aktiva, så $u_1 = u_2 = u_3 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -30 \\ -6 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u_5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $u_5 = 30$ och $u_4 + u_5 = 6$, vilket ger $u_4 = -24$ och $u_5 = 30$, så KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

Alla bivillkor är linjära, så det tillåtna området är konvext. Målfunktionen är konvex, så hela problemet är konvext. Ingen av punkterna är optimal.

3b: I startpunkten är bara ickenegativitetsvillkoren aktiva. Första LP-problemet blir
min $z = -50d_1 - 24d_2$ då $0 \leq d \leq 1$,
vilket har optimallösning $d = (1, 1)$ med $z = -74$. Sätt $x^{(2)} = (t, t)$. Maximal steglängd blir 2.5. Mimimum längs denna linje ger $t = 4.625$, så vi får $t = 2.5$, vilket ger $x^{(2)} = (2.5, 2.5)$.

Nu är bara bivillkor 5 aktivt. LP-problemet blir
min $z = -25d_1 - 9d_2$ då $d_1 + d_2 \leq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$,
vilket har optimallösning $d = (1, -1)$ med $z = -16$. Sätt $x^{(3)} = (2.5 + t, 2.5 - t)$. Maximal steglängd blir 1.5. Linjesökning ger $t = 1 < 1.5$, så vi får $t = 1$ och $x^{(2)} = (3.5, 1.5)$.

Nu är bivillkor 5 aktivt. LP-problemet blir
min $z = -15d_1 - 15d_2$ då $d_1 + d_2 \leq 0$, $d_2 \leq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$,
vilket har optimallösning $d = (0, 0)$ med $z = 0$. Alltså är punkten $x = (3.5, 1.5)$ optimal.

3c: Lagrangerelaxationen:
$\varphi(u) = \min_{0 \leq x_1 \leq 4, 0 \leq x_2 \leq 4} 5x_1^2 + 3x_2^2 - 50x_1 - 24x_2 + u(x_1 + x_2 - 5) = 5x_1^2 + 3x_2^2 + (u - 50)x_1 + (u - 24)x_2 - 5u$.

Minimum kan fås genom att sätta gradienten av Lagrangefunktionen lika med noll, vilket ger $10x_1 + u - 50 = 0$ och $6x_2 + u - 24 = 0$, dvs. $x_1 = 5 - u/10$ och $x_2 = 4 - u/6$, förutsatt att dessa punkter ligger i det tillåtna området $0 \leq x_1 \leq 4$ och $0 \leq x_2 \leq 4$. Annars hamnar man på närmaste gräns.

För $u = 0$ får vi $x_1 = 4$ och $x_2 = 4$, med $\varphi(0) = -168$. Undre gräns: -168. Punkten är inte tillåten, så vi får ingen övre gräns.

För $u = 10$ får vi $x_1 = 4$ och $x_2 = 7/3 \approx 2.333$, med $\varphi(10) = -146.333$. Undre gräns ökar till −146.333. Punkten är inte tillåten, så vi får ingen övre gräns.

För $u = 20$ får vi $x_1 = 3$ och $x_2 = 2/3 \approx 0.667$, med $\varphi(20) = -146.333$. Undre gräns ökar till −146.333. Punkten är tillåten, och ger övre gränsen −119.667.

Vi får bästa undre gräns −146.333 och övre gräns −119.667. För $u = 20$ fås en tillåten lösning, så det optimala värdet på u ligger mellan 10 och 20.

Uppgift 4

4a: Det är ett handelsresandeproblem. Undre gräns hittas med billigaste 1-träd, kostnad 43.

För att få en tillåten lösning kan man helt enket byta båge (3,4) i 1-trädet mot båge (4,5). Då får alla noder valens två, och vi får en rundtur som kostar 45. Turen blir 1-2-3-5-4-6-7-1. Undre gränsen är 43, så lösningen ligger högst 2 från optimum.

4b: Eftersom varje rum ska undersökas en gång, är den totala tiden för detta konstant, och påverkas inte av vilken väg man väljer.

4c: Det är nu ett kinesiskt brevbärarproblem. Faktorn 10 är ointressant och påverkar inte vilken lösning som är bäst. Noderna 2, 3, 4 och 6 har udda valens, och det billigaste sättet att få jämn valens är att dubblera bågarna (2,3) och (4,6). Kostnaden för turen blir 65. En optimal tur är 1-2-3-5-4-3-4-6-2-6-7-1.

Uppgift 5

5a: Billigaste väg, lös med Dijkstras metod. Billigaste vägen: 1-3-4-7, kostnad 10.

5b: Vi har $y_6 = 11$ och $y_8 = 12$, så båda skulle ge längre väg.

Uppgift 6

6a: P0: LP-optimum: $x_1 = 2.25$, $x_2 = 0$, $z = 15.75$. Detta ger $\bar{z} = 15$. Vi förgrenar över x_1.

P1 = P0 +($x_1 \leq 2$).
P2 = P0 +($x_1 \geq 3$).

P1: LP-optimum: $x_1 = 2$, $x_2 = 0.333$, $z = 15.333$, vilket ger ger $\bar{z} = 15$. Förgrena över x_2.

P3 = P1 +($x_2 \leq 0$).
P4 = P1 +($x_2 \geq 1$).

P3: LP-optimum: $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $z = 14$. En tillåten heltalslösning, så vi får $\underline{z} = 14$. Spara lösningen och kapa grenen.

P4: LP-optimum: $x_1 = 1.5$, $x_2 = 1$, $z = 14.5$. Det ger $\bar{z} = 14$. Kapa, ty $\underline{z} = 14$.

P2: Saknar tillåten lösning. Kapa.

Trädet avsökt. Optimallösning: $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $z = 14$. I ord: Köp två stora lådor.

6b: Inget av bivillkoren är aktivt i optimum.

Uppgift 7

7a: Efter första steget fås $\alpha = (4,4,4,4,4)$ och $\beta = (0,2,0,1,3)$. Man kan inte stryka alla nollor med färre än fem streck. Vi får (till exempel) lösningen $x_{13} = 1$, $x_{24} = 1$, $x_{31} = 1$, $x_{45} = 1$, $x_{52} = 1$, och total kostnad blir 26. Optimal duallösning är $\alpha = (4,4,4,4,4)$ och $\beta = (0,2,0,1,3)$. Summering av duallösningen ger 26, så starka dualsatsen är uppfylld.

7b: Det hjälper inte. α_5 minskar med 2. Samma primallösning är fortfarande optimal. Optimala målfunktionsvärdet minskar med 2.