Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

TAOP88
Lösning till tentamen
2023-01-04

Lösningar

Uppgift 1

1a: Tre bivillkor ger tre basvariabler. Eftersom både vanliga variabler och slackvariabler kan vara basvariabler, blir högst tre vanliga variabler större än noll. Det betyder att högst tre olika produkter kan ingå i optimallösningen. (Under förutsättning att man väljer en extrempunkt, vilket simplexmetoden alltid gör.)

1b: Starta med slackvariablerna som basvariabler.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	-3	-2	-3	-1	0	0	0	0
x_5	0	3	3	5	2	1	0	0	20
x_6	0	2	3	4	2	0	1	0	16
x_7	0	1	0	0	0	0	0	1	5

Först fås x_1 som inkommande variabel och x_7 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	0	-2	-3	-1	0	0	3	15
x_5	0	0	3	5	2	1	0	-3	5
x_6	0	0	3	4	2	0	1	-2	6
x_1	0	1	0	0	0	0	0	1	5

Därefter fås x_3 som inkommande variabel och x_5 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	0	-1/5	0	1/5	3/5	0	6/5	18
x_3	0	0	3/5	1	2/5	1/5	0	-3/5	1
x_6	0	0	3/5	0	2/5	-4/5	1	2/5	2
x_1	0	1	0	0	0	0	0	1	5

Nu fås x_2 som inkommande variabel och x_3 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	0	0	1/3	1/3	2/3	0	1	55/3
x_2	0	0	1	5/3	5/3	1/3	0	-1	5/3
x_6	0	0	0	-1	0	-1	1	1	1
x_1	0	1	0	0	0	0	0	1	5

Nu är tablån optimal. Optimallösningen blir $x_1 = 5$, $x_2 = 5/3 \approx 1.667$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 0$, $x_6 = 1$, $x_7 = 0$ med $z = 55/3 \approx 18.33$. Duallösningen läses av i målfunktionsraden under startbasvariablerna. $y_1 = 2/3$, $y_2 = 0$, $y_3 = 1$, $v = 55/3$.

Svar i ord: Gör 500 elefanter och 166 venusar. All lagringsplats används ej. Förtjänsten blir 18.33.

1c: Skuggpriserna är lika med duallösningen, och anger hur mycket man skulle vinna på att öka högerledet med en enhet. $y_1 = 2/3$ och $y_2 = 0$, så man skulle tjäna mest på att öka högerledet i bivillkor 1, dvs. maskintiden. 6 **1d:** Ny variabel x_8. Reducerad kostnad: $\hat{c}_8 = c_8 - a_8^T y = c_8 - 3y_1 - 4y_2 = c_8 - 2 > 0$ om $c_8 > 2$, dvs. försäljningspriset måste vara större än $2 + 9 = 11$.

Uppgift 2

2a: Startlösningen är tillåten och ger att basbågarna är (1,2), (1,6), (2,3), (5,3) och (6,4). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 9$, $y_3 = 15$, $y_4 = 12$, $y_5 = 8$, $y_6 = 6$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{15} = -2 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{25} = 9 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{34} = 11 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{54} = 2 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{65} = 4 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Alla optimalitetsvillkor är nu uppfyllda, så lösningen är optimal.

2b: Nu får vi $\hat{c}_{54} = -1 < 0$ (inte optimalt ty $x = 0$). Välj x_{54} som inkommande, att öka. Cykeln blir 5-4-6-1-2-3-5, och maximal ändring blir 2. Det ger båge (1,6) som utgående. Nya nodpriser blir $y_1 = 0$, $y_2 = 9$, $y_3 = 15$, $y_4 = 11$, $y_5 = 8$, $y_6 = 5$, och reducerade kostnaderna $\hat{c}_{15} = -2 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{16} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{25} = 9 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{34} = 12 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{65} = 3 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Alla optimalitetsvillkor är nu uppfyllda, så lösningen är optimal. Totalkostnaden sänks med $1 * 2 = 2$.

2c: Finn maxflöde från nod 1 till nod 4. Starta med flöde noll.

Sök maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 1-2-3, med kapacitet 10. Skicka 10 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båda bågarna blir fulla.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 1-5-3, med kapacitet 7. Skicka 7 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (1,5) blir full.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 1-6-5-3, med kapacitet 2. Skicka 2 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (5,3) blir full.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi kan nu bara märka nod 1, 6, 5 och 4, så minsnittet går över bågarna (1,2), (2,5) baklänges, (5,3) och (3,4) baklänges. Maxflödet är 19.

Uppgift 3

3a: Skriv problemet på standardform för att applicera KKT-villkoren.
$g_1(x) = -x_1 \le -0.1$, $g_2(x) = -x_2 \le -0.1$, $g_3(x) = x_1 + x_2 - 1 \le 0$, $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 6x_1 - 12 \\ 8x_2 - 16 \end{pmatrix}$, $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_3 x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

För punkt (0.1, 0.1):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 3 är inte aktivt, så $u_3 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -11.4 \\ -15.2 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $u_1 = -11.4$ och $u_2 = -15.2$. KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

För punkt (0.9, 0.1):
KKT1: Punkten är tillåten.

KKT2: Bivillkor 1 är inte aktivt, så $u_1 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -6.6 \\ -15.2 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $u_3 = 6.6$ och $u_3 - u_2 = 15.2$, vilket ger Vi får $u_2 = -8.6$. KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

För punkt $(0.1, 0.9)$:
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 2 är inte aktivt, så $u_2 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -11.4 \\ -8.8 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $-u_1 + u_3 = 11.4$ och $u_3 = 8.8$, vilket ger $u_1 = -2.6$, så KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

Alla bivillkor är linjära, så det tillåtna området är konvext. Målfunktionen är konvex, så hela problemet är konvext. Ingen av punkterna är optimal.

3b: I startpunkten är de två första bivillkoren aktiva. Första LP-problemet blir
$$\min z = -11.4d_1 - 15.2d_2 \text{ då } 0 \le d \le 1,$$
vilket har optimallösning $d = (1, 1)$ med $z = -26.6$. Sätt $x^{(2)} = (0.1 + t, 0.1 + t)$. Maximal steglängd blir 0.4. Mimimum längs denna linje ger $t = 1.9$, så vi får $t = 0.4$, vilket ger $x^{(2)} = (0.5, 0.5)$.

Nu är bara bivillkor 3 aktivt. LP-problemet blir
$$\min z = -9d_1 - 12d_2 \text{ då } d_1 + d_2 \le 0, \text{ samt } -1 \le d \le 1,$$
vilket har optimallösning $d = (-1, 1)$ med $z = -3$. Sätt $x^{(3)} = (0.5 - t, 0.5 + t)$. Maximal steglängd blir 0.4. Linjesökning ger $t = 3/14 \approx 0.214$, så vi får $t = 3/14$ och $x^{(2)} = (2/7, 5/7) \approx (0.286, 0.714)$.

Nu är bivillkor 3 aktivt. LP-problemet blir
$$\min z = -72/7(d_1 + d_2) \text{ då } d_1 + d_2 \le 0, \text{ samt } -1 \le d \le 1,$$
vilket har optimallösning $d = (0, 0)$ med $z = 0$. Alltså är punkten $x = (2/7, 5/7)$ optimal.

3c: Lagrangerelaxationen:
$\varphi(u) = \min_{x_1 \ge 0.1, x_2 \ge 0.1} 3x_1^2 + 4x_2^2 - 12x_1 - 16x_2 + u(x_1 + x_2 - 1) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + (u - 12)x_1 + (u - 16)x_2 - u$.

Minimum kan fås genom att sätta gradienten av Lagrangefunktionen lika med noll, vilket ger $6x_1 + u - 12 = 0$ och $8x_2 + u - 16 = 0$, dvs. $x_1 = 2 - u/6$ och $x_2 = 2 - u/8$, förutsatt att dessa punkter ligger i det tillåtna området $x_1 \ge 0.1$ och $x_2 \ge 0.1$. Annars hamnar man på närmaste gräns.

För $u = 0$ får vi $x_1 = 2$ och $x_2 = 2$, med $\varphi(0) = -28$. Undre gräns: -28. Punkten är inte tillåten, så vi får ingen övre gräns.

För $u = 8$ får vi $x_1 = 2/3$ och $x_2 = 1$, med $\varphi(8) = -40/3 \approx -13.33$. Undre gräns ökar till -13.33. Punkten är inte tillåten, så vi får ingen övre gräns.

För $u = 12$ får vi $x_1 = 0.1$ och $x_2 = 0.5$, med $\varphi(12) = -12.97$. Undre gräns ökar till -12.97. Punkten är tillåten, och ger övre gränsen -8.17.

Vi får bästa undre gräns -12.97 och övre gräns -8.17. För $u = 12$ fås en tillåten lösning, så det optimala värdet på u ligger mellan 8 och 12.

Uppgift 4

4a: Det är ett handelsresandeproblem. Undre gräns hittas med billigaste 1-träd, kostnad 31.

Om man kör närmaste granne från nod 1, nås inte alla noderna. Genom att byta några bågar i 1-trädet, kan man få turen 1-2-4-5-7-6-3-8-1, med kostnaden 39. Man kan också få turen 1-2-3-6-4-5-7-8-1, med kostnaden 37. Lösningen är alltså maximalt 8 (eller 6) enheter dyrare än optimum.

4b: Det är nu ett kinesiskt brevbärarproblem. Noderna 1, 2, 3, 5, 6 och 7 har udda valens. De gator som ska köras mer än en gång ska öka valensen med ett för dessa noder. Det kommer alltså att krävas minst tre bågar. Det billigaste sättet att uppnå detta är med bågarna (1,2), (3,6) och (5,7). Dessa bågar bildar en perfekt matchning tilld essa noder.

4c: Vi löser nu det kinesiska brevbärarproblemet, genom att dubblera ovanstående bågar, och hitta en Eulertur i denna graf. Kostnaden för turen blir 90. En optimal tur är t.ex. 1-2-4-5-6-4-3-6-7-5-7-8-6-3-2-1-3-8-1. (Många andra möjligheter finns.)

4d: Det bästa vore att ta bort den dyraste gata som körs två gånger, i detta fall (5,7), vilket tar bort subturen 7-5-7 från turen, och minskar kostnaden med $2 * 5 = 10$.

Uppgift 5

5a: Billigaste väg, lös med Dijkstras metod. Billigaste vägen: 1-2-4-7, kostnad 15.

5b: Vi har $y_5 = 11$ och $y_7 = 15$, så om $c_{57} < 4$ skulle ge bättre lösning. Vägen blir då 1-2-5-7.

Uppgift 6

P0: LP-optimum: $x_1 = 5.5$, $x_2 = 0$, $z = 16.5$. Detta ger $\bar{z} = 16$. Vi förgrenar över x_1.

P1 = P0 $+(x_1 \leq 5)$.
P2 = P0 $+(x_1 \geq 6)$.

P1: LP-optimum: $x_1 = 5$, $x_2 = 2/7 \approx 0.286$, $z = 115/7 \approx 16.43$ vilket ger ger $\bar{z} = 16$. Förgrena över x_2.

P3 = P1 $+(x_2 \leq 0)$.
P4 = P1 $+(x_2 \geq 1)$.

P3: LP-optimum: $x_1 = 5$, $x_2 = 0$, $z = 15$. En tillåten heltalslösning, så vi får $\underline{z} = 15$. Spara lösningen och kapa grenen.

P4: LP-optimum: $x_1 = 15/4 = 3.75$, $x_2 = 1$, $z = 16.25$, vilket ger $\bar{z} = 16$. Kan fortfarande få bättre lösning. Förgrena över x_1.

P5 = P4 $+(x_1 \leq 3)$.

P6 = P4 +($x_1 \geq 4$).

P5: LP-optimum: $x_1 = 3$, $x_2 = 10/7 \approx 1.43$, $z \approx 16.142$, vilket ger $\bar{z} = 16$. Kan fortfarande få bättre lösning. Förgrena över x_2.

P7 = P5 +($x_2 \leq 1$).
P8 = P5 +($x_2 \geq 2$).

P7: LP-optimum: $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $z = 14$, vilket ger $\bar{z} = 14$. Kapa grenen, för $\bar{z} < \underline{z}$.

P8: LP-optimum: $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $z = 16$. En tillåten heltalslösning, så vi får $\underline{z} = 16$. Spara lösningen och kapa grenen.

P6: Eftersom P0 har $\bar{z} = 16$ kan vi kapa P2 direkt. (Saknar tillåten lösning, men det är ju jobbigare att ta reda på.)

P2: Eftersom P0 har $\bar{z} = 16$ kan vi kapa P2 direkt.

Trädet avsökt. Optimallösning: $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $z = 16$. I ord: Köp två små och två stora bilar.

Uppgift 7

7a: Efter första steget fås $\alpha = (5, 4, 4, 5, 4)$ och $\beta = (0, 2, 0, 0, 0)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 1 och 5, samt kolumn 1 och 5, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (5, 5, 5, 6, 4)$ och $\beta = (-1, 2, 0, 0, -1)$. Nu kan man inte stryka alla nollor med färre än fem streck, och får (till exempel) lösningen $x_{14} = 1$, $x_{25} = 1$, $x_{31} = 1$, $x_{42} = 1$, $x_{53} = 1$, och total kostnad blir 25. Optimal duallösning är $\alpha = (5, 5, 5, 6, 4)$ och $\beta = (-1, 2, 0, 0, -1)$. Summering av duallösningen ger 25, så starka dualsatsen är uppfylld.

7b: Den primala lösningen är inte unik. Man kan byta positionerna (4,2) och (5,3) mot (4,3) och (5,2).

Den duala lösningen är aldrig unik. (Man kan addera valfri konstant till α och β.)