Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

TAOP88
Lösning till tentamen
2023-03-22

Lösningar

Uppgift 1

1a: Starta med slackvariablerna som basvariabler.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$\hat{b}$
z	1	-5	-7	-8	-6	0	0	0	0	0
x_5	0	3	0	2	1	1	0	0	0	70
x_6	0	3	3	2	1	0	1	0	0	60
x_7	0	2	2	2	3	0	0	1	0	40
x_8	0	0	2	2	1	0	0	0	1	20

Först fås x_3 som inkommande variabel och x_8 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$\hat{b}$
z	1	-5	1	0	-2	0	0	0	4	80
x_5	0	3	-2	0	0	1	0	0	-1	50
x_6	0	3	1	0	0	0	1	0	-1	40
x_7	0	2	0	0	2	0	0	1	-1	20
x_3	0	0	1	1	1/2	0	0	0	1/2	10

Därefter fås x_1 som inkommande variabel och x_7 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	$\hat{b}$
z	1	0	1	0	3	0	0	5/2	3/2	130
x_5	0	0	-2	0	-3	1	0	-3/2	1/2	20
x_6	0	0	1	0	-3	0	1	-3/2	1/2	10
x_1	0	1	0	0	1	0	0	1/2	-1/2	10
x_3	0	0	1	1	1/2	0	0	0	1/2	10

Nu är tablån optimal. Optimallösningen blir $x_1 = 10$, $x_2 = 0$, $x_3 = 10$, $x_4 = 0$, $x_5 = 20$, $x_6 = 10$, $x_7 = 0$, $x_8 = 0$ med $z = 130$. Optimallösningen är unik, eftersom ingen icke-basvariabel har reducerad kostnad noll. Bivillkor 3 och 4 är aktiva, eftersom slackvariablerna är noll. Duallösningen läses av i målfunktionsraden under startbasvariablerna, x_5 - x_8. $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 5/2 = 2.5$, $y_4 = 3/2 = 1.5$, $v = 130$.

Svar i ord: Gör 10 påsar av sort 1 och 10 påsar av sort 3. Vinsten blir 130. Alla muttrar av storlek M8 och M10 går åt, medan det blir 20 över av M4 och 10 över av M6.

1b: Skuggpriserna är lika med duallösningen, och anger hur mycket man skulle vinna på att öka högerledet med en enhet. $y_3 = 2.5$ är störst, så man skulle tjäna mest på att öka högerledet i bivillkor 3, dvs. skaffa fler M8.

1c: Eftersom det finns 10 oanvända M6 (och 20 M4) kan hon göra 2 nya påsar. (Eller 2.5 om vi inte kräver heltal.) Eftersom det inte innebär minskning av någon annan sorts påsar, ger det ökad vinst för alla positiva värden av vinsten för den nya påsen.

1d: Ny variabel x_9. Reducerad kostnad: $\hat{c}_9 = c_9 - a_9^T y = c_9 - 4y_1 - 4y_4 = c_9 - 6 > 0$ om $c_9 > 6$.

Uppgift 2

2a: Startlösningen är tillåten och ger att basbågarna är (1,6), (2,3), (2,4), (6,2) och (6,5). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 8$, $y_3 = 11$, $y_4 = 15$, $y_5 = 11$, $y_6 = 3$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{12} = -5 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{25} = 0$ (optimalt), $\hat{c}_{34} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{45} = 9 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{65} = 4 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Alla optimalitetsvillkor är nu uppfyllda, så lösningen är optimal.

2b: Nu får vi $\hat{c}_{34} = -1 < 0$ (inte optimalt ty $x = 0$). Välj x_{34} som inkommande, att öka. Cykeln blir 3-4-2-3. och maximal ändring blir 4. Det ger båge (2,4) som utgående. Nya nodpriser blir $y_1 = 0$, $y_2 = 8$, $y_3 = 11$, $y_4 = 14$, $y_5 = 11$, $y_6 = 3$, och reducerade kostnaderna $\hat{c}_{12} = -5 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{24} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{25} = 0$ (optimalt), $\hat{c}_{45} = 8 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{65} = 4 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Alla optimalitetsvillkor är nu uppfyllda, så lösningen är optimal. Totalkostnaden sänks med $1 * 4 = 4$.

2c: Finn maxflöde från nod 1 till nod 4. Starta med flöde noll.

Sök maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 1-6-5, med kapacitet 6. Skicka 6 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (1,6) blir full.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 1-2-4-5, med kapacitet 3. Skicka 3 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (4,5) blir full.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 1-2-5, med kapacitet 2. Skicka 2 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (2,5) blir full.) Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi kan nu bara märka nod 1, 2, 3 och 4, så minsnittet går över bågarna (1,6), (6,2) baklänges, (2,5) och (4,5). Maxflödet är 11.

Uppgift 3

3a: Skriv problemet på standardform för att applicera KKT-villkoren.
$g_1(x) = -x_1 \leq -0$, $g_2(x) = -x_2 \leq -0$, $g_3(x) = x_1 + x_2 - 1 \leq 0$, $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 16x_1 - 32 \\ 8x_2 - 16 \end{pmatrix}$, $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_3 x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

För punkt (0, 0):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 3 är inte aktivt, så $u_3 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -32 \\ -16 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $u_1 = -32$ och $u_2 = -16$. KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

För punkt (1, 0):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 1 är inte aktivt, så $u_1 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -16 \\ -16 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Detta ger $u_3 = 16$ och $u_3 - u_2 = 16$, vilket ger Vi får $u_2 = 0$. KKT4 är uppfyllt. Punkten är en KKT-punkt. (Att $u_2 = 0$ betyder att bivillkor 2, $x_2 \geq 0$, egentligen inte spelar någon roll.)

För punkt (0, 1):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 2 är inte aktivt, så $u_2 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -32 \\ -8 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $-u_1 + u_3 = 32$ och $u_3 = 8$, vilket ger $u_1 = -24$, så KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

Alla bivillkor är linjära, så det tillåtna området är konvext. Målfunktionen är konvex, så hela problemet är konvext. KKT-villkoren visar då att punkt (1,0) är optimal.

3b: I startpunkten är de två första bivillkoren aktiva. Första LP-problemet blir

$$\min z = -32d_1 - 16d_2 \text{ då } 0 \leq d \leq 1,$$

vilket har optimallösning $d = (1, 1)$ med $z = -48$. Sätt $x^{(2)} = (t, t)$. Maximal steglängd blir $1/2$. Mimimum längs denna linje fås för $t = 2$, så vi får $t = 1/2$, vilket ger $x^{(2)} = (1/2, 1/2)$.

Nu är bara bivillkor 3 aktivt. LP-problemet blir

$$\min z = -24d_1 - 12d_2 \text{ då } d_1 + d_2 \leq 0, \text{ samt } -1 \leq d \leq 1,$$

vilket har optimallösning $d = (1, -1)$ med $z = -12$. Sätt $x^{(3)} = (1/2 + t, 1/2 - t)$. Maximal steglängd blir $1/2$. Linjesökning ger $t = 3/2$, så vi får $t = 1/2$ och $x^{(3)} = (1, 0)$.

Nu är bivillkor 3 aktivt. LP-problemet blir

$$\min z = -16(d_1 + d_2) \text{ då } d_1 + d_2 \leq 0, \text{ samt } -1 \leq d \leq 1,$$

vilket har optimallösning $d = (0, 0)$ med $z = 0$. Alltså är punkten $x = (1, 0)$ optimal.

3c: Lagrangerelaxationen:
$\varphi(u) = \min_{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0} 8x_1^2 + 4x_2^2 - 32x_1 - 16x_2 + u(x_1 + x_2 - 1) = 8x_1^2 + 4x_2^2 + (u - 32)x_1 + (u - 16)x_2 - u$.

Minimum kan fås genom att sätta gradienten av Lagrangefunktionen lika med noll, vilket ger $16x_1 + u - 32 = 0$ och $8x_2 + u - 16 = 0$, dvs. $x_1 = 2 - u/16$ och $x_2 = 2 - u/8$, förutsatt att dessa punkter ligger i det tillåtna området $x_1 \geq 0$ och $x_2 \geq 0$. Annars hamnar man på närmaste gräns.

För $u = 0$ får vi $x_1 = 2$ och $x_2 = 2$, med $\varphi(0) = -48$. Undre gräns: -48. Punkten är inte tillåten, så vi får ingen övre gräns.

För $u = 8$ får vi $x_1 = 3/2$ och $x_2 = 1$, med $\varphi(8) = -30$. Undre gräns ökar till -30. Punkten är inte tillåten, så vi får ingen övre gräns.

För $u = 16$ får vi $x_1 = 1$ och $x_2 = 0$, med $\varphi(16) = -24$. Undre gräns ökar till -24. Punkten är tillåten, och ger övre gränsen -24.

Vi får bästa undre gräns -24 och övre gräns -24, så för $u = 16$ fås en optimal lösning, dvs. det optimala värdet på u är 16.

Uppgift 4

4a: Det är ett handelsresandeproblem. Undre gräns hittas med billigaste 1-träd, kostnad 20.

Närmaste granne från nod 1 ger turen 1-2-3-4-5-6, med kostnaden 25. Lösningen är alltså maximalt 5 enheter dyrare än optimum.

4b: Det är nu ett kinesiskt brevbärarproblem. Noderna 2, 4, 5 och 6 har udda valens. Den billigaste matchningen till dessa noder är bågarna (2,6) och (4,5), med kostnad 10. Vi dubblerar dessa bågar, och hitta en Eulertur i denna graf. Kostnaden för turen blir $40 + 10 = 50$. En optimal tur är t.ex. 1-2-3-4-2-5-4-5-6-2-6-1. (Många andra lika bra turer finns.)

Uppgift 5

5a: Billigaste väg, lös med Dijkstras metod. Billigaste vägen: 1-3-4-6-8, kostnad 26. Ja, hon kommer fram före Valdemar.

5b: Mellantider fås av nodpriserna, som anger tiderna när man bör passera varje nod: $y_1 = 0$, $y_3 = 8$, $y_4 = 14$, $y_6 = 20$, $y_8 = 26$.

Uppgift 6

6a: P0: LP-optimum: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $z = 24$. Detta ger $\bar{z} = 24$. Det är en tillåten heltalslösning, så vi får $\underline{z} = 24$. Vi sparar lösningen och kapar grenen.

Nu är trädet avsökt. Optimallösning: $x_1 = 0$, $x_2 = 3$, $z = 24$. I ord: Köp tre maskiner av sort 2.

(Även om man kan misstänka att tentakonstruktören har misslyckats med att välja lämpliga siffror, måste man följa metoden noga.)

6b: Det andra av de två bivillkoren är aktivt (samt ickenegativitetsvillkoret för x_1).

Uppgift 7

7a: Efter första steget fås $\alpha = (0, 2, 4, 3, 4)$ och $\beta = (0, 0, 0, 0, 2)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 1 och 2, samt kolumn 1 och 5, med minsta ostrukna element 2, vilket gör att vi får $\alpha = (0, 2, 6, 5, 6)$ och $\beta = (-2, 0, 0, 0, 0)$. Nu kan man inte stryka alla nollor med färre än fem streck, och får (till exempel) lösningen $x_{12} = 1$, $x_{23} = 1$, $x_{34} = 1$, $x_{45} = 1$, $x_{51} = 1$, och total kostnad blir 17. Optimal duallösning är $\alpha = (0, 2, 6, 5, 6)$ och $\beta = (-2, 0, 0, 0, 0)$. Summering av duallösningen ger 17, så starka dualsatsen är uppfylld.

7b: Den primala lösningen är unik för dessa α och β, dvs. för dessa rad- och kolumnstrykningar. Den duala lösningen är aldrig unik. (Man kan addera valfri konstant till α och β.)