Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

TAOP88
Lösning till tentamen
2023-06-09

Lösningar

Uppgift 1

1a: Starta med slackvariablerna som basvariabler.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	-8	-9	-8	0	0	0	0
x_4	0	1/2	3/10	1/5	1	0	0	7
x_5	0	1/2	3/10	3/10	0	1	0	10
x_6	0	0	3/10	1/2	0	0	1	6

Först fås x_2 som inkommande variabel och x_6 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	-8	0	7	0	0	30	180
x_4	0	1/2	0	-3/10	1	0	-1	1
x_5	0	1/2	0	-1/5	0	1	-1	4
x_2	0	0	1	5/3	0	0	10/3	20

Därefter fås x_1 som inkommande variabel och x_4 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	0	0	2.2	16	0	14	196
x_1	0	1	0	-3/5	2	0	-2	2
x_5	0	0	0	1/10	-1	1	0	3
x_2	0	0	1	5/3	0	0	10/3	20

Nu är tablån optimal. Optimallösningen blir $x_1 = 2$, $x_2 = 20$, $x_3 = 0$, $x_4 = 0$, $x_5 = 3$, $x_6 = 0$ med $z = 196$.

Optimallösningen är unik, eftersom ingen icke-basvariabel har reducerad kostnad noll. Duallösningen läses av i målfunktionsraden under startbasvariablerna, x_4 - x_6, enligt ledningen. $y_1 = 1.6$, $y_2 = 0$, $y_3 = 1.4$, $v = 196$.

Svar i ord: Gör 2 påsar av sort 1, 20 påsar av sort 2 och 3 påsar av sort 5. Vinsten blir 196.

1b: Skuggpriserna är lika med duallösningen, och anger hur mycket man skulle vinna på att öka högerledet med en enhet. $y_1 = 1.6$ är störst, så man skulle tjäna mest på att öka högerledet i bivillkor 1, dvs. göra mer chokladkola.

1c: Ny variabel x_7. Reducerad kostnad: $\hat{c}_7 = c_7 - a_7^T y = c_7 - 5y_2 - 5y_3 = c_7 - 7 > 0$ om $c_7 > 7$.

1d: LP-dual:
min $70y_1 + 100y_2 + 60y_3$
då $5y_1 + 5y_2 \geq 8$, $3y_1 + 3y_2 + 3y_3 \geq 9$, $2y_1 + 3y_2 + 5y_3 \geq 8$, $10y_1 \geq 0$, $10y_2 \geq 0$, $10y_3 \geq 0$

Likhet i de primala bivillkoren ger fria y-variabler, dvs. man har inte $y \geq 0$. Men de tre sista duala bivillkoren ger ju att inget y kan bli negativt, så det gör ingen skillnad om man har likhet eller olikhet i de primala bivillkoren.

Det nya duala bivillkoret blir $5y_2 + 5y_3 \geq c_7$. Med den duala lösningen $y_1 = 1.6$, $y_2 = 0$, $y_3 = 1.4$ instoppad, blir bivillkoret $7 \geq c_7$.

Uppgift 2

2a: Startlösningen är tillåten och ger att basbågarna är (1,5), (5,3), (2,6), (6,4) och (6,3). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 2$, $y_3 = 15$, $y_4 = 15$, $y_5 = 7$, $y_6 = 9$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{16} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{21} = 11 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{25} = 5 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{54} = -1 < 0$ (ej optimalt ty $x = 0$). Välj x_{54} som inkommande, att öka. Cykeln blir 5-4-6-3-5. och maximal ändring blir 3. Det ger båge (5,3) som utgående. Nya nodpriser blir $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = 14$, $y_4 = 14$, $y_5 = 7$, $y_6 = 8$, och reducerade kostnaderna $\hat{c}_{16} = 2 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{21} = 10 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{25} = 4 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{53} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Alla optimalitetsvillkor är nu uppfyllda, så lösningen är optimal. Totalkostnaden sänks med $1 * 3 = 3$.

2b: Vi får $\hat{c}_{21} = c_{21} + y_2 - y_1 = 0 + 1 - 0 = 1 > 0$, och skulle inte tjäna på denna ändring. Vi får $\hat{c}_{65} = c_{65} + y_6 - y_5 = 0 + 8 - 7 = 1 > 0$, och skulle inte tjäna på denna ändring. Det vore alltså dumt att betala för denna ändring.

Uppgift 3

3a: Skriv problemet på standardform för att applicera KKT-villkoren.
$g_1(x) = -x_1 \leq -0$, $g_2(x) = -x_2 \leq -0$, $g_3(x) = x_1 + x_2 - 3 \leq 0$, $g_4(x) = x_1 - 2 \leq 0$, $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 - 12 \\ 8x_2 - 16 \end{pmatrix}$, $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_3 x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_4 x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

För punkt (0, 0):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 3 och 4 är inte aktiva, så $u_3 = u_4 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -12 \\ -16 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $u_1 = -12$ och $u_2 = -16$. KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

För punkt (2, 0):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 1 och 3 är inte aktiva, så $u_1 = u_3 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -4 \\ -16 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $u_2 = -16$ och $u_4 = 4$, vilket ger att KKT4 inte är uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

För punkt (2, 1):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 1 och 2 är inte aktiva, så $u_1 = u_2 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -4 \\ -8 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $u_3 = 8$ och $u_4 = -4$, så KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

För punkt (0, 3):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 2 och 4 är inte aktiva, så $u_2 = u_4 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -12 \\ 8 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $u_1 = -20$ och $u_3 = -8$, så KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

Ingen av punkterna är optimal.

3b: I startpunkten är de två första bivillkoren aktiva. Första LP-problemet blir
$$\min z = -12d_1 - 16d_2 \text{ då } 0 \leq d \leq 1,$$
vilket har optimallösning $d = (1, 1)$ med $z = -28$. Sätt $x^{(2)} = (t, t)$. Maximal steglängd blir $3/2$. Mimimum längs denna linje fås för $t \approx 2.33$, så vi får $t = 3/2$, vilket ger $x^{(2)} = (3/2, 3/2)$.

Nu är bara bivillkor 3 aktivt. LP-problemet blir
$$\min z = -6d_1 - 4d_2 \text{ då } d_1 + d_2 \leq 0, \text{ samt } -1 \leq d \leq 1,$$
vilket har optimallösning $d = (1, -1)$ med $z = -2$. Sätt $x^{(3)} = (3/2 + t, 3/2 - t)$. Maximal steglängd blir $1/2$. Linjesökning ger $t = 1/6$, så vi får $t = 1/6$ och $x^{(3)} = (5/3, 4/3)$.

Nu är bivillkor 3 aktivt. LP-problemet blir
$$\min z = -16(d_1 + d_2)/3 \text{ då } d_1 + d_2 \leq 0, \text{ samt } -1 \leq d \leq 1,$$
vilket har optimallösning $d = (0, 0)$ med $z = 0$. Alltså är punkten $x = (5/3, 4/3)$ optimal.

3c: Lagrangerelaxationen:
$\varphi(u) = \min_{0 \leq x_1 \leq 2, x_2 \geq 0} 2x_1^2 + 4x_2^2 - 12x_1 - 16x_2 + u(x_1 + x_2 - 3) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + (u - 12)x_1 + (u - 16)x_2 - 3u$.

Minimum kan fås genom att sätta gradienten av Lagrangefunktionen lika med noll, vilket ger $4x_1 + u - 12 = 0$ och $8x_2 + u - 16 = 0$, dvs. $x_1 = 3 - u/4$ och $x_2 = 2 - u/8$, förutsatt att dessa punkter ligger i det tillåtna området $0 \leq x_1 \leq 2$ och $x_2 \geq 0$. Annars hamnar man på närmaste gräns.

För $u = 0$ får vi $x_1 = 2$ och $x_2 = 2$, med $\varphi(0) = -32$. Undre gräns: -32. Punkten är inte tillåten, så vi får ingen övre gräns.

För $u = 4$ får vi $x_1 = 2$ och $x_2 = 3/2$, med $\varphi(8) = -29$. Undre gräns ökar till -29. Punkten är inte tillåten, så vi får ingen övre gräns.

För $u = 6$ får vi $x_1 = 3/2$ och $x_2 = 5/4$, med $\varphi(16) = -115/4 = -28.75$. Undre gräns ökar till -28.75. Punkten är tillåten, och ger övre gränsen -27.25.

Vi får bästa undre gräns -28.75 och övre gräns -27.25.

3d: För $u = 4$ har vi en otillåten lösning, och för $u = 6$ har vi en tillåten lösning. Det betyder att bästa värdet för u ligger mellan 4 och 6, samt att det relaxerade bivillkoret ska vara uppfyllt med likhet. Vi vet också att $x_1 < 2$ i denna punkt. Bivillkoret blir $x_1 + x_2 = 3 - u/4 + 2 - u/8 = 5 - 3u/8 = 3$, vilket ger $u = 16/3$. Detta ger $x_1 = 5/3$ och $x_2 = 4/3$.

Uppgift 4

4a: Det är ett handelsresandeproblem. Undre gräns hittas med billigaste 1-träd, kostnad 67.

För att hitta en tillåten tur, noterar i att alla noder måste få valensen 2, vilket ger att bågarna (1,2), (1,7), (3,5), (4,5), (4,6) och (6,7) måste vara med. Då kan inte bågarna (3,4) och (4,7) vara med, ty de skulle ge för små cykler. Trivialt ser man att båge (2,3) måste var med, vilket ger cykeln 1-2-3-5-4-6-1-1, med kostnaden 71. Lösningen är alltså maximalt 4 enheter dyrare än optimum. (Dock ger ovanstående resonemang att ingen annan tillåten lösning finns, så den måse vara optimal.)

I 1-trädet har nod 4 valens högre än två, så bivillkoret $x_{24} + x_{34} + x_{45} + x_{46} + x_{47} \leq 2$ skär bort denna lösning.

4b: Det är nu ett kinesiskt brevbärarproblem. Noderna 2, 3, 4 och 7 har udda valens. Den billigaste matchningen till dessa noder är bågarna (2,3) och (4,7), med kostnad 19. Vi dubblerar dessa bågar, och hitta en Eulertur i denna graf. Kostnaden för turen blir 120. En optimal tur är t.ex. 1-2-3-4-5-3-2-4-6-7-4-7-1. (Många andra lika bra turer finns.)

Uppgift 5

5a: Billigaste väg, lös med Dijkstras metod. Billigaste vägen: 1-2-5-7, kostnad 29.

5b: Vi har nodpriser $y_6 = 20$ och $y_7 = 29$, så $c_{67} < 9$ skulle ge en kortare väg, och den skulle vara 1-3-6-7.

Uppgift 6

6a: P0: LP-optimum: $x_1 = 2.5$, $x_2 = 1.5$, $z = 24.5$. Detta ger $\bar{z} = 24$. Vi förgrenar över x_1.

P1 = P0 $+(x_1 \leq 2)$.
P2 = P0 $+(x_1 \geq 3)$.

P1: LP-optimum: $x_1 = 2$, $x_2 = 1.8$, $z = 24.4$ vilket ger ger $\bar{z} = 24$. Förgrena över x_2.

P3 = P1 $+(x_2 \leq 1)$.
P4 = P1 $+(x_2 \geq 2)$.

P3: LP-optimum: $x_1 = 2$, $x_2 = 1$, $z = 18$. En tillåten heltalslösning, så vi får $\underline{z} = 18$. Spara lösningen och kapa grenen.

P4: LP-optimum: $x_1 \approx= 1.67$, $x_2 = 2$, $z \approx 24.33$, vilket ger $\bar{z} = 24$. Kan fortfarande få bättre lösning. Förgrena över x_1.

P5 = P4 +($x_1 \leq 1$).
P6 = P4 +($x_1 \geq 2$).

P5: LP-optimum: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $z = 21$. En tillåten heltalslösning, så vi får $\underline{z} = 21$. Spara lösningen och kapa grenen.

P6: Tillåten lösning saknas. Kapa grenen.

P2: LP-optimum: $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $z = 23$. En tillåten heltalslösning, så vi får $\underline{z} = 23$. Spara lösningen och kapa grenen.

Trädet avsökt. Optimallösning: $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $z = 23$. I ord: Köp tre små kastruller och en stor.

Uppgift 7

7a: Efter första steget fås $\alpha = (0, 1, 4, 4, 3)$ och $\beta = (0, 0, 0, 0, 0)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 1, samt kolumn 1 och 5, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (0, 2, 5, 5, 4)$ och $\beta = (-1, 0, 0, 0, -1)$. Nu kan man stryka alla nollor genom att stryka rad 1, 2 och 3, samt kolumn 1, med minsta ostrukna element 1, vilket gör att vi får $\alpha = (0, 2, 5, 6, 5)$ och $\beta = (-2, 0, 0, 0, -1)$. Nu kan man inte stryka alla nollor med färre än fem streck, och får (till exempel) lösningen $x_{12} = 1$, $x_{23} = 1$, $x_{35} = 1$, $x_{44} = 1$, $x_{51} = 1$, och total kostnad blir 15. Optimal duallösning är $\alpha = (0, 2, 5, 6, 5)$ och $\beta = (-2, 0, 0, 0, -1)$. Summering av duallösningen ger 15, så starka dualsatsen är uppfylld.

7b: Ändringen ger skillnaden att $\alpha_1 = 10$, och optimala målfunktionsvärdet ökar med 10. Den optimala primala lösningen ändras inte.