Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

TAOP88
Lösning till tentamen
2023-08-25

Lösningar

Uppgift 1

1a: Starta med slackvariablerna som basvariabler.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	-4	-5	-6	0	0	0	0	0
x_4	0	3	2	1	1	0	0	0	12
x_5	0	3	2	3	0	1	0	0	18
x_6	0	2	2	1	0	0	1	0	6
x_7	0	0	2	3	0	0	0	1	10

Först fås x_3 som inkommande variabel och x_7 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	-4	-1	0	0	0	0	2	20
x_4	0	3	4/3	0	1	0	0	-1/3	26/3
x_5	0	3	0	0	0	1	0	-1	8
x_6	0	2	4/3	0	0	0	1	-1/3	8/3
x_3	0	0	2/3	1	0	0	0	1/3	10/3

Därefter fås x_1 som inkommande variabel och x_6 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	$\hat{b}$
z	1	0	5/3	0	0	0	2	4/3	$76/3 \approx 25.333$
x_4	0	0	-2/3	0	1	0	-3/2	1/6	$14/3 \approx 4.667$
x_5	0	0	-2	0	0	1	-3/2	-1/2	4
x_1	0	1	2/3	0	0	0	1/2	-1/6	$4/3 \approx 1.333$
x_3	0	0	2/3	1	0	0	0	1/3	$10/3 \approx 3.333$

Nu är tablån optimal. Optimallösningen blir $x_1 = 1.333$, $x_2 = 0$, $x_3 = 3.333$, $x_4 = 4.667$, $x_5 = 4$, $x_6 = 0$, $x_7 = 0$ med $z = 25.333$.

Optimallösningen är unik, eftersom ingen icke-basvariabel har reducerad kostnad noll. Bivillkor 3 och 4 är aktiva, eftersom slackvariablerna är noll. Duallösningen läses av i målfunktionsraden under startbasvariablerna, x_4 - x_7, enligt ledningen. $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 2$, $y_4 = 1.333$, $v = 25.333$.

Svar i ord: Gör 1.333 flerpack av sort 1 och 3.333 flerpack av sort 3. Vinsten blir 25.333. Alla smultron och hallon går åt.

1b: Skuggpriserna är lika med duallösningen, och anger hur mycket man skulle vinna på att öka högerledet med en enhet. $y_3 = 2$ är störst, så man skulle tjäna mest på att öka högerledet i bivillkor 3, dvs. skörda mer smultron.

1c: Ny variabel x_8. Reducerad kostnad: $\hat{c}_8 = c_8 - a_8^T y = 3 - 4y_1 - 4y_2 = 3 > 0$. Svar ja, det skulle förbättra lösningen.

Alternativ motivation: Det finns lite kvar av både röda och svarta vinbär ($y_1 = y_2 = 0$), så man kan göra lite av det nya flerpacket utan att minska något annat.

1d: Ny variabel x_9. Reducerad kostnad: $\hat{c}_9 = c_9 - a_9^T y = c_9 - 4y_3 - 4y_4 = c_9 - 8 - 5.333 > 0$ om $c_9 > 13.333$.

1e: LP-dual:
min $12y_1 + 18y_2 + 6y_3 + 10y_4$
då $3y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 4$, $2y_1 + 2y_2 + 2y_3 + 2y_4 \geq 5$, $y_1 + 3y_2 + y_3 + 3y_4 \geq 6$, $y_1, y_2, y_3 \geq 0$

Det nya duala bivillkoret blir $4y_3 + 4y_4 \geq c_9$. Med den duala lösningen $y_3 = 2$ och $y_4 = 1.333$ instoppad, blir bivillkoret $13.333 \geq c_9$.

Uppgift 2

2a: Startlösningen är tillåten och ger att basbågarna är (1,6), (2,3), (2,7), (6,5), (7,4) och (7,5). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = 7$, $y_4 = 8$, $y_5 = 10$, $y_6 = 5$, $y_7 = 4$, och följande reducerade kostnader: $\hat{c}_{13} = -2 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{15} = -3 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{26} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{24} = -1 < 0$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{63} = 3 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{64} = 5 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Alla optimalitetsvillkor är uppfyllda, så lösningen är optimal.

2b: Nu får vi $\hat{c}_{64} = -1 < 0$ (ej optimalt ty $x = 0$). Välj x_{64} som inkommande, att öka. Cykeln blir 6-4-7-5-6, och maximal ändring blir 1. Det ger båge (7,4) som utgående (eller (6,5)). Nodpriserna blir oförändrade, förutom $y_4 = 7$, och ändringarna i reducerade kostnader blir $\hat{c}_{24} = 0$ (optimalt), $\hat{c}_{74} = 1 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Alla optimalitetsvillkor är nu uppfyllda, så lösningen är optimal. Totalkostnaden sänks med $1 * 1 = 1$.

2c: Finn maxflöde från nod 1 till nod 5. Starta med flöde noll.

Sök maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 1-6-5, med kapacitet 10. Skicka 10 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båda bågarna blir fulla.)

Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 1-5, med kapacitet 3. Skicka 3 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (1,5) blir full.)

Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi kan nu bara märka nod 1 och 3, så minsnittet går över bågarna (1,5), (1,6), (2,3) baklänges och (6,3) baklänges. Maxflödet är 13.

Uppgift 3

3a: Skriv problemet på standardform för att applicera KKT-villkoren.
$g_1(x) = x_1 + x_2 - 1 \leq 0$, $g_2(x) = x_1 - 0.7 \leq 0$, $g_3(x) = x_2 - 0.5 \leq 0$, $g_4(x) = -x_1 \leq 0$, $g_5(x) = -x_2 \leq 0$, $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 6x_1 - 5 \\ 8x_2 - 10 \end{pmatrix}$, $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$,

$\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_4(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_5(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

För punkt (0, 0.5):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 1, 2, 5 är inte aktiva, så $u_1 = u_2 = u_5 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -5 \\ -6 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + u_4 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $u_3 = 6$ och $u_4 = -5$. KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

För punkt (0.7, 0.3):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 3, 4, 5 är inte aktiva, så $u_3 = u_4 = u_5 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -0.8 \\ -7.6 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $u_1 = 7.6$ och $u_2 = -6.8$. KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

För punkt (0.7, 0.7):
KKT1: Punkten är inte tillåten. Punkten är inte en KKT-punkt.

För punkt (0.7, 0):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 1, 3, 4 är inte aktiva, så $u_1 = u_3 = u_4 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -0.8 \\ -10 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_5 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $u_1 = 0.8$ och $u_5 = -10$, så KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

Alla bivillkor är linjära, så det tillåtna området är konvext. Målfunktionen är konvex, så hela problemet är konvext. Ingen av punkterna är optimal.

3b: I startpunkten är bara ickenegativitetsvillkoren aktiva. Första LP-problemet blir
min $z = -5d_1 - 10d_2$ då $0 \leq d \leq 1$,
vilket har optimallösning $d = (1, 1)$ med $z = -15$. Sätt $x^{(2)} = (t, t)$. Maximal steglängd blir 0.5. Mimimum längs denna linje ger $t > 1$, så vi får $t = 0.5$, vilket ger $x^{(2)} = (0.5, 0.5)$.

Nu är bivillkor 1 och 3 aktiva. LP-problemet blir
min $z = -2d_1 - 6d_2$ då $d_1 + d_2 \leq 0$, $d_2 \leq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$,
vilket har optimallösning $d = (0, 0)$ med $z = 0$. Alltså är punkten $x = (0.5, 0.5)$ optimal.

3c: Lagrangerelaxationen:
$\varphi(u) = \min_{0 \leq x_1 \leq 0.7, 0 \leq x_2 \leq 0.5} 3x_1^2 + 4x_2^2 - 5x_1 - 10x_2 + u(x_1 + x_2 - 1) = 3x_1^2 + 4x_2^2 + (u - 5)x_1 + (u - 10)x_2 - u$.

Minimum kan fås genom att sätta gradienten av Lagrangefunktionen lika med noll, vilket ger $6x_1 + u - 5 = 0$ och $8x_2 + u - 10 = 0$, dvs. $x_1 = (5 - u)/6$ och $x_2 = (10 - u)/8$, förutsatt att dessa punkter ligger i det tillåtna området $0 \leq x_1 \leq 0.7$ och $0 \leq x_2 \leq 0.5$.

Annars hamnar man på närmaste gräns.

För $u = 0$ får vi $x_1 = 0.7$ och $x_2 = 0.5$, med $\varphi(0) = -6.03$. Undre gräns: -28. Punkten är inte tillåten, så vi får ingen övre gräns.

För $u = 1$ får vi $x_1 = 2/3$ och $x_2 = 0.5$, med $\varphi(1) = -6$. Undre gräns ökar till -6. Punkten är inte tillåten, så vi får ingen övre gräns.

För $u = 2$ får vi $x_1 = 0.5$ och $x_2 = 0.5$, med $\varphi(2) = -5.75$. Undre gräns ökar till -5.75. Punkten är tillåten, och ger övre gränsen -5.75.

Vi får bästa undre gräns -5.75 och övre gräns -5.75. För $u = 2$ fås denna tillåtna lösning, så det optimala värdet på u är 2.

Uppgift 4

4a: P0: LP-optimum: $x_1 \approx 4.785$, $x_2 \approx 0.285$, $z = 31$. Detta ger $\bar{z} = 31$. Vi förgrenar över x_1.

P1 = P0 $+(x_1 \leq 4)$.
P2 = P0 $+(x_1 \geq 5)$.

P1: LP-optimum: $x_1 = 4$, $x_2 = 0.6$, $z = 28.8$, vilket ger ger $\bar{z} = 28.8$. Förgrena över x_2.

P3 = P1 $+(x_2 \leq 0)$.
P4 = P1 $+(x_2 \geq 1)$.

P3: LP-optimum: $x_1 = 4$, $x_2 = 0$, $z = 20$. En tillåten heltalslösning, så vi får $\underline{z} = 20$. Spara lösningen och kapa grenen.

P4: LP-optimum: $x_1 = 3$, $x_2 = 1$, $z = 26$. En tillåten heltalslösning, så vi får $\underline{z} = 26$. Spara lösningen och kapa grenen.

P2: LP-optimum: $x_1 = 5$, $x_2 = 0$, $z = 30$. En tillåten heltalslösning, så vi får $\underline{z} = 30$. Spara lösningen och kapa grenen.

Trädet avsökt. Optimallösning: $x_1 = 5$, $x_2 = 0$, $z = 30$. I ord: Köp två små och två stora bilar.

4b: Minsta två av varje sort, $x_1 \geq 2$, $x_2 \geq 2$, skulle ge vänsterled ≥ 14 i bivillkor 2, som har högerled 11, så problemet skulle sakna lösning.

Uppgift 5

5a: Det är ett kinesiskt brevbärarproblem. Noderna 6, 7, 8 och 9 har udda valens. De gator som ska köras mer än en gång ska öka valensen med ett för dessa noder. Det kommer alltså att krävas minst två bågar. Det billigaste sättet att uppnå detta är med bågarna (6,8) och (7,9). Vi löser nu problemet genom att dubblera ovanstående bågar, och hitta en Eulertur i denna graf. Kostnaden för turen blir 127. En optimal tur är t.ex. 1-2-8-3-4-6-8-6-5-7-8-9-7-9-1. (Många andra möjligheter finns.)

5b: Det är ett handelsresandeproblem. Undre gräns hittas med billigaste 1-träd, kostnad 75.

Närmaste granne från nod 1, eller modifiering av 1-trädet, kan ge turen 1-2-8-3-4-6-5-7-9-1, med kostnaden 81. Lösningen är alltså maximalt 6 enheter dyrare än optimum.

Ficklampan sparar honom $127 - 81 = 46$ tidsenheter.

Uppgift 6

6a: Efter första steget fås $\alpha = (5, 4, 4, 8, 13)$ och $\beta = (0, 0, 0, 0, 1)$. Man kan inte stryka alla nollor med färre än fem streck, och får lösningen $x_{11} = 1$, $x_{22} = 1$, $x_{33} = 1$, $x_{44} = 1$, $x_{55} = 1$, och total kostnad blir 35. Optimal duallösning är $\alpha = (5, 4, 4, 8, 13)$ och $\beta = (0, 0, 0, 0, 1)$. Summering av duallösningen ger 35, så starka dualsatsen är uppfylld.

6b: En lösning innehåller ett element i kolumn 1 och ett element i kolumn 5, Så kostnaden ökar med 3 och minskar med 3, dvs. blir oförändrad. Den primala optimallösningen blir oförändrad. I den duala optimallösingen fås $\beta = (-3, 0, 0, 0, 4)$.

Uppgift 7

7a: Om grafen är ett träd finns ingen valfrihet och i princip inget att optimera. Alla förfäder till nutida Vlad måste undersökas. Om dåtida Vlad hittas som förfäder, avbrytes metoden. Annars måste metoden kontrollera samtliga kända förfäder i 40 generationer. Man behöver dock bara titta på varje nod en gång, så metoden har komplexitet $O(n)$, om n är antal noder i grafen (som ju är stort). Metoden har dock exponentiell komplexitet i antal generationer.

När det gäller minne, räcker det att markera om varje nod är uppnådd, om han vill veta *om* men inte *hur* de är släkt. Så en lista med samtliga noder torde räcka. (Men den blir ju lång.)

Det är ingen fördel att börja med dåtida Vlad och gå framåt i tiden, eftersom varje par sannolikt i medel har fler än två barn.

Algoritm: Låt nod 1 vara nutida Vlad, och markera honom som uppnådd. För varje uppnådd person i en generation, markera båda föräldrarna som uppnådda. Spara en lista med uppnådda, men ej undersökta noder.

7b: Det spelar ingen större roll. En viss nod kan bli uppnådd på fler än ett sätt.