Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

TAOP88
Lösning till tentamen
2023-10-25

Lösningar

Uppgift 1

1a: Starta med slackvariablerna som basvariabler.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	-1	-1	-1	0	0	0	0
x_4	0	2	4	0	1	0	0	20
x_5	0	3	4	1	0	1	0	15
x_6	0	0	5	0	0	0	1	17

Först fås x_1 som inkommande variabel och x_5 som utgående. (Man kunde ha tagit x_2 eller x_3 som inkommande variabel, för de verkar lika bra.)

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	0	1/3	-2/3	0	1/3	0	5
x_4	0	0	4/3	-2/3	1	-2/3	0	10
x_1	0	1	4/3	1/3	0	1/3	0	5
x_6	0	0	5	0	0	0	1	17

Därefter fås x_3 som inkommande variabel och x_1 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	2	3	0	0	1	0	15
x_4	0	2	4	0	1	0	0	20
x_3	0	3	4	1	0	1	0	15
x_6	0	0	5	0	0	0	1	17

Nu är tablån optimal. Optimallösningen blir $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 15$, $x_4 = 20$, $x_5 = 0$, $x_6 = 17$ med $z = 15$.

Optimallösningen är unik, eftersom ingen icke-basvariabel har reducerad kostnad noll. Bivillkor 2 är aktivt, eftersom slackvariabeln är noll. Duallösningen läses av i målfunktionsraden under startbasvariablerna, x_3 - x_6, enligt ledningen. $y_1 = 0$, $y_2 = 1$, $y_3 = 0$, $v = 15$.

Svar i ord: Gör 15 portioner av efterrätten. All koriander går åt. Ingen vitlök eller habanero används.

1b: Ingen förrätt, ingen huvudrätt och 15 portioner efterrätt blir ingen trevlig middag, och definitivt ingen trerättersmiddag.

Förrätten, x_1, har $\hat{c}_1 = -2$, så c_2 bör ökas med 2 för att få $\hat{c}_1 = 0$. Enda skillnaden i optimaltablån är att den reducerade kostnaden för x_1 blir noll. Vi kan därför ta den som inkommande variabel utan att försämra (eller förbättra) lösningen.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	0	3	0	0	1	0	15
x_4	0	0	4/3	-2/3	1	-2/3	0	10
x_1	0	1	4/3	1/3	0	1/3	0	5
x_6	0	0	5	0	0	0	1	17

(Detta är i princip samma simplextablå som i näst sista steget i uppgift a.)

Optimallösningen blir nu $x_1 = 5$, $x_2 = 0$ och $x_3 = 0$. Nu blir det alltså bara förrätt, vilket heller inte är bra.

(När man har en icke-unik optimallösning, kan man även välja en lösning som är en konvexkombination av de två extrempunkerna. På detta sätt skulle man kunna få en middag med både förrätt och efterrätt, men fortfarande ingen huvudrätt.)

Problemet är att modellen är linjär, och därför ger extrema lösningar. Varje inkommande variabel ökas så mycket man får. Rogert hade kunnat få en bättre lösning genom att sätta övre gränser på variablerna. Men då hade han mer eller mindre i förväg bestämt hur lösningen skulle vara, och optimeringen hade varit onödig.

1c: Skuggpriserna är lika med duallösningen, och anger hur mycket man skulle vinna på att öka högerledet med en enhet. $y_2 = 1$ är störst, så man skulle tjäna mest på att öka högerledet i bivillkor 2, dvs. skaffa mer koriander.

1d: Ny variabel x_7. Reducerad kostnad: $\hat{c}_7 = c_7 - a_7^T y = c_7$, eftersom $a_{72} = 0$ och $y_1 = y_3 = 0$. Så svar ja, det skulle förbättra lösningen om $c_7 > 0$.

Alternativ motivation: Det finns mycket kvar av både vitlök och habanero, så man kan göra huvudrätt utan att minska något annat.

Uppgift 2

2a: Startlösningen är tillåten, kostar 47, och ger att basbågarna är (1,4), (2,3) och (2,4). Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 3$, $y_3 = 9$, $y_4 = 5$, och reducerad kostnad $\hat{c}_{13} = -6 < 0$ (ej optimalt ty $x = 0$). Välj x_{13} som inkommande, att öka. Cykeln blir 1-3-2-4-1, och maximal ändring blir 3. Kostnaden minskas med $3 * 6 = 18$. Det ger båge (1,4) som utgående.

Nodpriserna blir nu $y_1 = 0$, $y_2 = -3$, $y_3 = 3$, $y_4 = -1$, och reducerad kostnad $\hat{c}_{14} = 6 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Alla optimalitetsvillkor är uppfyllda, så lösningen är optimal. Flödet är $x_{13} = 3$, $x_{23} = 2$ och $x_{24} = 4$. Totalkostnaden är 29.

2b: Skicka den extra stolen längs med basträdet, vägen 1-3-2-4, dvs. öka x_{13}, minska x_{23} och öka $x_{24} = 5$, vilket ger flödet $x_{13} = 4$, $x_{23} = 1$ och $x_{24} = 5$.

Basträdet är det som var optimalt i uppgift a, vilket ger samma nodpriser, $y_1 = 0$, $y_2 = -3$, $y_3 = 3$, $y_4 = -1$, och samma reducerad kostnad $\hat{c}_{14} = 6 > 0$, som fortfarande är optimalt ty $x_{14} = 0$. Vi har alltså optimum. Totalkostnaden är nu 28, och har alltså *sänkts* med ett. (Förklaringen är att vägen 1-3-2-4 har kostnad $3 - 6 + 2 = -1$ per enhet.)

Uppgift 3

3a: Skriv problemet på standardform för att applicera KKT-villkoren.
$g_1(x) = x_1 + x_2 - 4 \leq 0$, $g_2(x) = x_1 - 3 \leq 0$, $g_3(x) = x_2 - 2 \leq 0$, $g_4(x) = -x_1 \leq 0$, $g_5(x) = -x_2 \leq 0$, $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 4x_1 - 10 \\ 8x_2 - 20 \end{pmatrix}$, $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_4(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_5(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Både smultron och lime krävs, så vi kan strunta i alla punkter där någon variabel är noll. Kvar är (2, 2) och (3, 1).

För punkt (2, 2):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 2, 4, 5 är inte aktiva, så $u_2 = u_4 = u_5 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -2 \\ -4 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $u_1 = 2$ och $u_3 = 2$. KKT4 är uppfyllt. Punkten är en KKT-punkt.

För punkt (3, 1):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 3, 4, 5 är inte aktiva, så $u_3 = u_4 = u_5 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} 2 \\ -12 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $u_1 = -12$ och $u_2 = 14$. KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

Antag nu att inga bivillkor är aktiva.
KKT2: Inga bivillkor är aktiva: $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_5 = 0$.
KKT4 blir då uppfyllt.
KKT3: $\begin{pmatrix} 4x_1 - 10 \\ 8x_2 - 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $x_1 = 2.5$ och $x_2 = 2.5$. Men den punkten uppfyller inte bivillkor 1, så KKT1 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

Alla bivillkor är linjära, så det tillåtna området är konvext. Målfunktionen är konvex, så hela problemet är konvext. KKT-villkoren visar då att punkt (2, 2) är optimal.

3b: I startpunkten är bara ickenegativitetsvillkoren aktiva. Första LP-problemet blir

min $z = -10d_1 - 20d_2$ då $0 \leq d \leq 1$,

vilket har optimallösning $d = (1, 1)$ med $z = -30$. Sätt $x^{(2)} = (t, t)$. Maximal steglängd blir 2. Mimimum längs denna linje ger $t = 2.5$, så vi får $t = 2$, vilket ger $x^{(2)} = (2, 2)$.

Nu är bivillkor 1 och 3 aktiva. LP-problemet blir

min $z = -2d_1 - 4d_2$ då $d_1 + d_2 \leq 0$, $d_2 \leq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$,

vilket har optimallösning $d = (0, 0)$ med $z = 0$. Alltså är punkten $x = (2, 2)$ optimal.

3c: Lagrangerelaxationen:
$\varphi(u) = \min_{0 \leq x_1 \leq 3, 0 \leq x_2 \leq 2} 2x_1^2 + 4x_2^2 - 10x_1 - 20x_2 + u(x_1 + x_2 - 4) = 2x_1^2 + 4x_2^2 + (u - 10)x_1 + (u - 20)x_2 - 4u$.

Minimum kan fås genom att sätta gradienten av Lagrangefunktionen lika med noll, vilket ger $4x_1+u-10=0$ och $8x_2+u-20=0$, dvs. $x_1=(10-u)/4$ och $x_2=(20-u)/8$, förutsatt att dessa punkter ligger i det tillåtna området $0 \leq x_1 \leq 3$ och $0 \leq x_2 \leq 2$. Annars hamnar man på närmaste gräns.

För $u=0$ får vi $x_1=5/2=2.5$ och $x_2=2$, med $\varphi(0)=-36.5$. Undre gräns: -36.5. Punkten är inte tillåten, så vi får ingen övre gräns.

För $u=1$ får vi $x_1=9/4=2.25$ och $x_2=2$, med $\varphi(1)=-36.125$. Undre gräns ökar till -36.125. Punkten är inte tillåten, så vi får ingen övre gräns.

För $u=2$ får vi $x_1=2$ och $x_2=2$, med $\varphi(2)=-34$. Undre gräns ökar till -34. Punkten är tillåten, och ger övre gränsen -34.

Vi får bästa undre gräns -34 och övre gräns -34, så lösningen är optimal. Denna tillåtna lösning fås för $u=2$, så det optimala värdet på u är 2.

Uppgift 4

4a: Variabeldefinition: $x_j=1$ om Elberta tittar på film j, 0 om inte.

Målfunktion: Se så många som möjligt: max $\sum_j x_j$

Bivillkor: Se högst en av de som överlappar vid olika tidpunkter:
Kl 17:31: $x_1+x_6 \leq 1$
Kl 18:01: $x_2+x_6 \leq 1$
Kl 19:31: $x_2+x_5+x_6 \leq 1$
Kl 20:01: $x_3+x_5+x_6 \leq 1$
Kl 21:01: $x_3+x_4+x_5 \leq 1$

Modell:

$$\begin{array}{llrrrrrrcrr}
\max & z = & x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & +x_5 & +x_6 & & & \\
\text{då} & & x_1 & & & & & +x_6 & \leq & 1 & (1) \\
 & & & x_2 & & & & +x_6 & \leq & 1 & (2) \\
 & & & x_2 & & & +x_5 & +x_6 & \leq & 1 & (3) \\
 & & & & x_3 & & +x_5 & +x_6 & \leq & 1 & (4) \\
 & & & & x_3 & +x_4 & +x_5 & & \leq & 1 & (5) \\
 & & x_1, & x_2, & x_3, & x_4, & x_5, & x_6 & \in & 0,1 &
\end{array}$$

(Bivillkor 2 kan tas bort, för det domineras av bivillkor 3.)

4b: Vi får en graf med följande bågar: (1,6), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6), (4,5), (5,6), och söker en största oberoende mängd, dvs. en mängd noder som inte har några bågar mellan sig.

Vi kan notera att grafen innehåller följande klickar: {1,6}, {2,5,6}, {3,4,5}, {3,5,6}, och att högst en nod i varje klick kan tas med.

En enkel heurstik tar först nod 1 (minst valens), stryker sedan nod 6, tar sedan nod 2 (minst valens), stryker nod 5, och tar sedan nod 3, och stryker nod 4. Alternativt kan nod 3 och 4 byta plats.

Elberta kan se högst tre filmer, och en lösning är film 1, 2 och 3, dvs. Aja baja Alfons Åberg, Barbie och De ostyriga (eller Meg 2: The Trench).

Uppgift 5

Given tillåten lösning: $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $z = 20$. Verifiering av att den är tillåten ger $\underline{z} = 20$.

P0: LP-optimum: $x_1 = 17/8 = 2.125$, $x_2 = 0$, $z = 170/8 = 85/4 = 21.25$. Detta ger $\bar{z} = 21$. (Dvs. vi kan kanske få något bättre än $\underline{z} = 20$.)

Vi förgrenar över x_1.

P1 = P0 +($x_1 \leq 2$).
P2 = P0 +($x_1 \geq 3$).

P1: LP-optimum: $x_1 = 2$, $x_2 = 0.2$, $z = 20.8$, vilket ger ger $\bar{z} = 20$. Kapa.

P2: LP-problemet saknar tillåten lösning. Kapa.

Trädet avsökt. Optimallösning: $x_1 = 2$, $x_2 = 0$, $z = 20$. I ord: Följ den gamles förslag: Öppna två fullstora affärer.

Uppgift 6

6a: Använd Dijkstras metod (min av summa). Billigaste väg: 1-2-5-4. Kostnad: 16. Vi har $y_6 = 14$, så om $c_{64} \leq 2$ går en billigaste väg via nod 6.

6b: Använd Dijkstras metod (max av min). Bästa väg: 1-2-5-4. Kapacitet: 5.

6c: Finn maxflöde från nod 1 till nod 4. Starta med flöde noll.

Första steget är gjort i uppgift b. Skicka 5 enheter vägen 1-2-5-4, och ändra tillåtna riktningar. (Bågarna (1,2) och (2,5) blir fulla.)

Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 1-8-6-4, med kapacitet 4. Skicka 4 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (6,4) blir full.)

Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 1-8-7-5-4, med kapacitet 2. Skicka 2 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båge (1,8) blir full.)

Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi kan nu bara märka nod 1, så minsnittet går över bågarna (1,2) och (1,8). Maxflödet är 11.

6d: Det är ett handelsresandeproblem. Undre gräns hittas med billigaste 1-träd, kostnad 41. En heuristik kan ge turen 1-2-3-4-5-6-7-8, med kostnaden 48. Lösningen är alltså maximalt 7 enheter dyrare än optimum.

6e: Det är ett kinesiskt brevbärarproblem. Noderna 5 och 8 har udda valens. De gator som ska köras mer än en gång ska öka valensen med ett för dessa noder. Det billigaste sättet att uppnå detta är med bågarna (5,6) och (6,8). Vi löser nu problemet genom att dubblera ovanstående bågar, och hitta en Eulertur i denna graf. Kostnaden för turen blir 90. En optimal tur är t.ex. 1-2-3-5-4-6-5-2-7-5-6-7-8-6-8-1. (Många andra optimala turer finns.)

Uppgift 7

Efter första steget fås $\alpha = (5, 4, 4, 8, 5)$ och $\beta = (0, 0, 0, 0, 1)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 1 samt kolumn 1 och 3. Minsta ostrukna element är 1.

Vi får nu $\alpha = (5, 5, 5, 9, 6)$ och $\beta = (-1, 0, -1, 0, 1)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 1 och 4 samt kolumn 1 och 3. Minsta ostrukna element är 1.

Vi får nu $\alpha = (5, 6, 6, 9, 7)$ och $\beta = (-2, 0, -2, 0, 1)$. Nu kan man inte stryka alla nollor med färre än fem streck, och får t.ex. lösningen $x_{14} = 1$, $x_{21} = 1$, $x_{33} = 1$, $x_{45} = 1$, $x_{52} = 1$, och total kostnad blir 30. Optimal duallösning är $\alpha = (5, 6, 6, 9, 7)$ och $\beta = (-2, 0, -2, 0, 1)$. Summering av duallösningen ger 30, så starka dualsatsen är uppfylld.