Tekniska Högskolan i Linköping
Matematiska Institutionen
Optimeringslära
Kaj Holmberg

TAOP88
Lösning till tentamen
2024-06-07

Lösningar

Uppgift 1

1a: Lös först max-problemet, P1. Starta med slackvariablerna som basvariabler.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	-2	-4	-6	0	0	0	0
x_4	0	1	1	2	1	0	0	200
x_5	0	2	1	0	0	1	0	180
x_6	0	0	1	1	0	0	1	150

Först fås x_3 som inkommande variabel och x_4 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	1	-1	0	3	0	0	600
x_3	0	0.5	0.5	1	0.5	0	0	100
x_5	0	2	1	0	0	1	0	180
x_6	0	-0.5	0.5	0	-0.5	0	1	50

Därefter fås x_2 som inkommande variabel och x_6 som utgående.

Bas	z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	$\hat{b}$
z	1	0	0	0	2	0	2	700
x_3	0	1	0	1	1	0	-1	50
x_5	0	3	0	0	1	1	-2	80
x_2	0	-1	1	0	-1	0	2	100

Nu är tablån optimal. Optimallösningen blir $x_1 = 0$, $x_2 = 100$, $x_3 = 50$, samt $x_4 = 0$, $x_5 = 80$, $x_6 = 0$, med $z = 700$.

Bivillkor 1 och 3 är aktiva, eftersom slackvariablerna är noll. Duallösningen läses av i målfunktionsraden under startbasvariablerna, $y_1 = 2$, $y_2 = 0$, $y_3 = 2$, $v = 700$.

Lös nu min-problemet, P2. Starta igen med slackvariablerna som basvariabler. Det ger samma starttablå som för max-problemet, men nu är lösningen direkt optimal, eftersom ingen inkommande variabel fås.

Optimallösningen blir $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, samt $x_4 = 200$, $x_5 = 180$, $x_6 = 150$, med $z = 0$. Bara ickenegativitetsvillkoren är aktiva. Duallösningen blir $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, $y_3 = 0$, $v = 0$.

P2 blir beräkningsmässigt väldigt ointressant, men ganska ovanligt. P1 är mer standard. Ta det.

1b: Duallösningen är skuggpriser, så P1 får skuggpriserna (2,0,2), medan P2 får (0,0,0). För P1 skulle man tjäna på att öka högerleden för bivillkor 1 och 3 (de är lika bra). För P2 tjänar man inte på att öka något högerled.

1c: Reducerad kostnad för P1: $\hat{c}_7 = c_7 - a_7^T y = -1 - (1, 1, 0)^T (2, 0, 2) = -3 < 0$.
Reducerad kostnad för P2: $\hat{c}_7 = c_7 - a_7^T y = -1 - (1, 1, 0)^T (0, 0, 0) = -1 < 0$.
x_7 blir inte inkommande i P1, så optimallösningen förändras inte.
x_7 blir inkommande i P2, så optimallösningen förändras.

Uppgift 2

2a: Skicka allt på direktbågen (1,5), som har kostnaden 7. Varje annan väg via en annan nod k får kostnaden $1 + k + 1 + k + 5 + 1 = 8 + 2k$ som ju är större än 7 för alla $k > 0$.

2b: Skicka nu fullt (3) i båge (1,5), samt 2 enheter vägen 1-2-5. Basbågar blir nu (1,2) och (2,5) samt t.ex. (1,3) och (1,4). (Inte (1,5).) Detta ger nodpriserna $y_1 = 0$, $y_2 = 4$, $y_3 = 5$, $y_4 = 6$, $y_5 = 9$, samt reducerade kostnaderna $\hat{c}_{15} = 7+0-9 = -2 < 00$ (optimalt ty $x = u$), $\hat{c}_{23} = 6+4-5 = 5 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{24} = 7+4-6 = 5 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{34} = 8+5-6 = 7 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{35} = 9+5-9 = 5 > 0$ (optimalt ty $x = 0$), $\hat{c}_{45} = 10 + 6 - 9 = 7 > 0$ (optimalt ty $x = 0$). Alla optimalitetsvillkor är uppfyllda, så lösningen är optimal.

2c: Finn maxflöde från nod 1 till nod 5. Starta med flöde noll.

Sök maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får (t.ex.) vägen 1-5, med kapacitet 3. Skicka 3 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Bågen blir full.)

Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen (t.ex.) 1-2-5, med kapacitet 3. Skicka 3 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båda bågarna blir fulla.)

Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får (t.ex.) vägen 1-3-5, med kapacitet 3. Skicka 3 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båda bågarna blir fulla.)

Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi får vägen 1-5-5, med kapacitet 3. Skicka 3 enheter och ändra tillåtna riktningar. (Båda bågarna blir fulla.)

Sök åter maximal flödesökande väg med Dijkstras metod. Vi kan nu bara märka nod 1, så minsnittet går över bågarna (1,2), (1,3), (1,4) och (1,5). Maxflödet är 12.

Uppgift 3

3a: $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 20x_1 - 40x_2$, så $\nabla f(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 - 20 \\ 4x_2 - 40 \end{pmatrix}$. Minimum fås där $\nabla f(x) = 0$, vilket ger $x_1 = 10$ och $x_2 = 10$.

3b: Bivillkoren blir $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ samt $x_1 + 2x_2 \leq b$, där $0 < b < 30$. Man kan t.ex. ta $b = 10$ eller $b = 20$. Jag väljer $b = 12$.

3c: Skriv problemet på standardform för att applicera KKT-villkoren.

$g_1(x) = -x_1 \leq 0$, $g_2(x) = -x_2 \leq 0$, $g_3(x) = x_1 + 2x_2 - 12 \leq 0$, $\nabla g_1(x) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\nabla g_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\nabla g_3(x) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Extrempunkterna är (0,0), $(12, 0)$ och $(0, 6)$.

För punkt (0,0):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 3 är inte aktivt, så $u_3 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -20 \\ -40 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $u_1 = -20$ och $u_2 = -40$. KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

För punkt $(12, 0)$:
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 1 är inte aktivt, så $u_1 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} 4 \\ -40 \end{pmatrix} + u_2 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $u_2 = -48$ och $u_3 = -4$. KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

För punkt $(0, 6)$:
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Bivillkor 2 är inte aktivt, så $u_2 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} -20 \\ -16 \end{pmatrix} + u_1 \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} + u_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $u_1 = -12$ och $u_3 = 8$. KKT4 är inte uppfyllt. Punkten är inte en KKT-punkt.

För en inre punkt (x_1, x_2):
KKT1: Punkten är tillåten.
KKT2: Inga bivillkor är aktiva, så $u_1 = 0$, $u_2 = 0$ och $u_3 = 0$.
KKT3: $\begin{pmatrix} 2x_1 - 20 \\ 4x_2 - 40 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.
Detta ger $x_1 = 10$ och $x_2 = 10$, vilket bryter mot KKT1. Punkten är inte en KKT-punkt.

Alla bivillkor är linjära, så det tillåtna området är konvext. Målfunktionen är konvex, så hela problemet är konvext. KKT-villkoren visar då att ingen av dessa punkter är optimal.

3d: I startpunkten är bara ickenegativitetsvillkoren aktiva. Första LP-problemet blir

min $z = -20d_1 - 40d_2$ då $0 \leq d \leq 1$,

vilket har optimallösning $d = (1, 1)$ med $z = -60$. Sätt $x^{(2)} = (t, t)$. Maximal steglängd blir 4. Minimum längs denna linje ger $t = 10$, så vi får $t = 4$, vilket ger $x^{(2)} = (4, 4)$.

Nu är bara bivillkor 3 aktivt. LP-problemet blir

min $z = -12d_1 - 24d_2$ då $d_1 + 2d_2 \leq 0$, samt $-1 \leq d \leq 1$, vilket har optimallösning bl.a. $d = (0,0)$ med $z = 0$. Alltså är punkten $x = (4,4)$ optimal, med målfunktionsvärde -192.

3e: Lagrangerelaxationen:
$\varphi(u) = \min_{x_1 \geq 0, x_2 \geq 0} x_1^2 + 2x_2^2 - 20x_1 - 40x_2 + u(x_1 + 2x_2 - 12) = x_1^2 + 2x_2^2 + (u-20)x_1 + (2u-40)x_2 - 12u$.

Minimum kan fås genom att sätta gradienten av Lagrangefunktionen lika med noll, vilket ger $2x_1 + u - 20 = 0$ och $4x_2 + 2u - 40 = 0$, dvs. $x_1 = (20-u)/2$ och $x_2 = (20-u)/2$, förutsatt att dessa punkter uppfyller $x_1 \geq 0$ och $x_2 \geq 0$. (Detta sker då $u < 20$.) Annars blir $x_1 = 0$ och $x_2 = 0$.

För $u = 0$ får vi $x_1 = 10$ och $x_2 = 10$, med $\varphi(0) = -300$. Undre gräns: -300. Punkten är inte tillåten, så vi får ingen övre gräns.

För $u = 10$ får vi $x_1 = 5$ och $x_2 = 5$, med $\varphi(10) = -195$. Undre gräns ökar till -195. Punkten är inte tillåten, eftersom $x_1 + 2x_2 - 12 = 3 > 0$, så ingen övre gräns fås.

För $u = 15$ får vi $x_1 = 2.5$ och $x_2 = 2.5$, med $\varphi(15) = -216.75$. Undre gräns ökar inte. Punkten är tillåten, och ger övre gräns $-149,25$.

Vi får bästa undre gräns -195 och övre gräns $-149,25$, och den bästa lösningen är $(2.5, 2.5)$, ej säkert optimal. Optimalt värde på u ligger mellan 10 och 15.

3f: Antag först att $x_1 = (20-u)/2$ och $x_2 = (20-u)/2$. (Om det skulle ge något negativt x så är antagandet felaktigt.)

Då blir $x_1 + 2x_2 = (20-u)/2 + 2(20-u)/2 = 3(20-u)/2$. Villkoret $x_1 + 2x_2 = 12$ blir då $3(20-u)/2 = 12$, vilket ger $u = 12$.

Kontroll: $u = 12$ ger $x_1 = 4$ och $x_2 = 4$. Vi ser att dessa värden är ickenegativa, och att $x_1 + 2x_2 = 12$.

Svar: $u = 12$.

Uppgift 4

4a: Det är ett handelsresandeproblem. Undre gräns hittas med billigaste 1-träd, kostnad 30. En heuristik kan ge turen 1-2-3-4-1-5-1, med kostnaden 38, eller 1-3-4-2-5-1, med kostnaden 35. Vi får alltså undre gräns 30, och övre 38 (eller 35).

4b: Noderna 4 och 5 har udda valens. De bågar som ska användas mer än en gång ska öka valensen med ett för dessa noder. Det billigaste sättet att uppnå detta är med bågarna (4,1) och (1,5), med kostnad 13. Vi löser nu problemet genom att dubblera denna båge, och hitta en Eulertur i denna graf. Kostnaden för turen blir $60 + 13 = 73$. En optimal tur är t.ex. 1-2-3-4-2-5-3-1–4-1-5-1. (Flera optimala turer finns.)

Uppgift 5

5a: Finn billigaste väg från nod 1 till nod 5 med Dijkstras metod. Det ger följande nodmärkningar: $y = (0,4,5,6,7)$ (ger duallösning) och $p = (-,1,1,1,1)$. Billigaste väg blir 1-5 med kostnad 7.

5b: De duala bivillkoren är $y_j - y_i \leq c_{ij}$, så man kan minska nodpriset i slutnoden j lite (om man kollar bivillkoren för de bågar där den noden är startnod). Ett ganska patetiskt (men korrekt) svar är att sätta alla y till noll. Ett enklare sätt är att bara sänka nodpriset för slutnoden lite.

Uppgift 6

6a: P0: LP-optimum: $x_1 = 2\ 4/7 \approx 2.571$, $x_2 = 2\ 1/7 \approx 2.143$, $z = 4\ 6/7 \approx 4.71429$. Detta ger $\bar{z} = 4$.

Förgrena över x_1. P1 = P0 $+(x_1 \leq 2)$. P2 = P0 $+(x_1 \geq 3)$.

P1: LP-optimum: $x_1 = 2$, $x_2 = 2.6$, $z = 4.6$, vilket ger $\bar{z} = 4$.

Förgrena över x_2. P3 = P1 $+(x_2 \leq 2)$. P4 = P1 $+(x_2 \geq 3)$.

P3: LP-optimum: $x_1 = 2$, $x_2 = 2$, $z = 4$, vilket är en tillåten heltalslösning, och ger $\underline{z} = 4$. Kapa grenen.

Vi kan också kapa alla grenar under P0, eftersom de har $\bar{z} = 4$. Trädet är avsökt. Optimum är $x_1 = 2$, $x_2 = 2$ med $z = 4$.

(Faktum är alla alla heltalslösningarna (4,0), (3,1), (2,2), (1,3) och (0,4) är optimala.)

6b: Det blir svårt att få problemet svårare genom att öka b_1. Om $b_1 \geq 30$ fås heltalslösningen (6,0) direkt i P0. För $22 \leq b_1 \leq 29$ fås liknande lösningsgångar som ovan.

Uppgift 7

7a: Detta är ett tillordningsproblem. Lös med ungerska metoden.

Efter första steget fås $\alpha = (1, 2, 3, 4, 5)$ och $\beta = (0, 1, 2, 3, 4)$. Nu är alla reducerade kostnader noll. En tillåten lösning kan t.ex. fås av diagonalen. $x_{11} = 1$, $x_{22} = 1$, $x_{33} = 1$, $x_{44} = 1$, $x_{55} = 1$, och total kostnad blir 25. Optimal duallösning är $\alpha = (1, 2, 3, 4, 5)$ och $\beta = (0, 1, 2, 3, 4)$. Summering av duallösningen ger 25, så starka dualsatsen är uppfylld.

7b: En av många möjligheter: Minska c_{14}, c_{31} och c_{41} till 2. Efter första steget fås $\alpha = (1, 2, 2, 2, 5)$ och $\beta = (0, 1, 2, 1, 4)$. Man kan stryka alla nollor genom att stryka rad 1, 2 och 5 samt kolumn 1. Minsta ostrukna element är 1. Vi får nu $\alpha = (1, 2, 3, 3, 5)$ och $\beta = (-1, 1, 2, 1, 4)$.

Nu kan man inte stryka alla nollor med färre än fem streck, och får lösningen $x_{14} = 1$, $x_{22} = 1$, $x_{33} = 1$, $x_{41} = 1$, $x_{55} = 1$, och total kostnad blir 21. Optimal duallösning är $\alpha = (1, 2, 3, 3, 5)$ och $\beta = (-1, 1, 2, 1, 4)$. Summering av duallösningen ger 21, så starka dualsatsen är uppfylld.