Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP88/TEN 1
OPTIMERING FÖR INGENJÖRER för EMM

Datum:	27 maj 2011
Tid:	14.00-19.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i normal omfattning får förekomma i boken.
Antal uppgifter:	4
Antal sidor:	4
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs normalt 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Firma Legio AB kan göra tre olika legeringar och har tre olika maskiner som används. Man sätter upp följande LP-problem, där x_j anger hur många ton av legering j man ska göra (per dag). Målfunktionen anger hur mycket vinst man får (sort 1000 kr), och bivillkoren anger tillgänglig kapacitet för de tre maskinerna (per dag).

$$
\begin{array}{llrcrcrcll}
\max & z = & 2x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & & & \\
\text{då} & & x_1 & & & + & 2x_3 & \leq & 4 & \quad (1) \\
& & 3x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & \leq & 6 & \quad (2) \\
& & x_1 & & & + & x_3 & \leq & 4 & \quad (3) \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

a) Lös problemet med simplexmetoden. Ange optimallösning samt vilka maskiner som har kapacitet över. Är optimallösningen unik? (3p)

b) Ange och tolka bivillkorens skuggpriser. Hur mycket ökar vinsten om kapaciteten hos maskin 1 ökas med 2 enheter? Hur mycket ökar vinsten om kapaciteten hos maskin 2 ökas med 2 enheter? (Antag att dessa ändringar inte förändrar skuggpriset.) (2p)

c) Vinsten för legering 2 ändras oväntat från 2 till 4. Uppdatera optimaltablån från uppgift a (dvs. beräkna korrekt $\hat{c}_2$ och för in i tablån). Fortsätt med simplexmetoden från den tablån. Ange ny optimallösning. (3p)

d) Finns det någon tillåten baslösning där man tillverkar legering 2 och maskin 2 har kapacitet över? (Göm inte att motivera.) (2p)

e) Formulera LP-dualen till problemet i uppgift a. Ange optimal duallösning med hjälp av optimaltablån i uppgift a. Visa att komplementaritetsvillkoren är uppfyllda. (3p)

f) Man funderar på att kräva att varje legering enbart får tillverkas i hela ton, eftersom det skulle förenkla hanteringen. Inför detta krav. Utgå från LP-lösningen i uppgift a och gör en förgrening i Land-Doig-Dakins metod. Vad kan sägas om de uppkomna delproblemen? (Ytterligare användning av simplexmetoden krävs ej.) Man vill inte införa denna ändring om den kostar mer än 800 kr (per dag) i utebliven vinst. Hur ska man göra? (3p)

Uppgift 2

Firma Ftalato AB producerar plast. Man experimenterar med att tillsätta två olika mjukgörare till sin plast, och formulerar följande problem, där x_j anger hur många mg av ämne j som tillsätts. I målfunktionen anger $f(x)$ risken för sprickor i slutprodukten. Det första bivillkoret anger en lagstadgad gräns för miljöpåverkan, medan det andra bivillkoret anger begränsad tillgång av ämne 1.

$$
\begin{array}{rrcl}
\min f(x) = & x_1^2 + 2x_2^2 - 4x_1 - 8x_2 - x_1x_2 & & \\
\text{då} & x_1 + x_2 & \leq & 2 \\
& x_1 & \leq & 1 \\
& x_1 & \geq & 0 \\
& x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

a) Starta i origo (inga mjukgörare tillsatta) och gör en iteration med Zoutendijks metod. (En iteration innebär följande: Finn första sökriktningen, bestäm steglängden och finn nästa sökriktning, för att avgöra om optimum har nåtts. Därefter kan man sluta.) (3p)

b) Starta i origo och gör en iteration med Frank-Wolfes metod. (En iteration innebär följande: Finn första sökriktningen, bestäm steglängden och finn nästa sökriktning, samt beräkna övre och undre gränser.) (3p)

c) Sätt upp KKT-villkoren för problemet och kontrollera om följande punkter är optimala. A: $(1, 1)$, B: $(3/4, 5/4)$, C: $(0, 2)$. (3p)

Uppgift 3

Symmetrier i indata kan ibland göra vissa problem lättare att lösa och ibland svårare. Betrakta i detta exempel tillordningsproblemet. Svaren skall motiveras genom att lösa ett exempel med angivna kostnader av storlek 4×4.

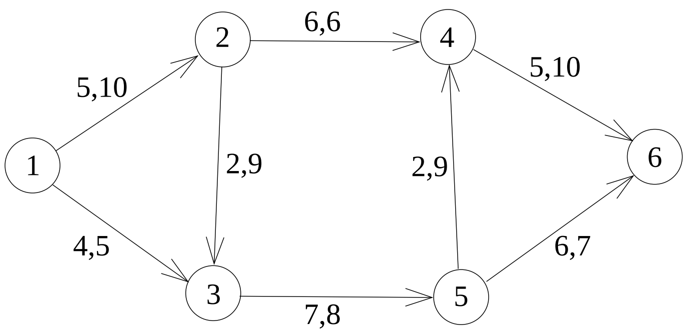
a) Gör kostnaderna $c_{ij} = i + j$ att det blir lättare eller svårare? (Detta betyder t.ex. att $c_{23} = 2 + 3 = 5$.) (2p)

b) Gör kostnaderna $c_{ij} = i * j$ att det blir lättare eller svårare? (Detta betyder t.ex. att $c_{23} = 2 * 3 = 6$.) (3p)

Uppgift 4

Nedanstående nätverk representerar produktionsprocessen i en fabrik med varuintag i nod 1 och utleverering i nod 6. Varje båge motsvarar en aktivitet (t.ex. maskin) som har en viss kostnad per enhet och en viss kapacitet (övre gräns för antalet produkter). Varje båge är märkt med kostnad och kapacitet. Alla bågar har undre gräns noll.

Produkterna som bearbetas startar i nod 1 och måste passera aktiviteterna längs en väg i grafen till nod 6. En lösning motsvarar alltså ett flöde från nod 1 till nod 6. (Produkter kan inte förflyttas från en nod till en annan på något annat sätt än att använda en båge.)



a) Hur många produkter kan man maximalt hantera? Finn svaret genom att ignorera kostnaderna och finna maxflöde från nod 1 till nod 6. Starta med flödet noll i alla bågar. Ange minsnitt/flaskhals. (3p)

b) Hur kan man bearbeta 10 enheter på billigaste sätt? För att svara på frågan, betrakta minkostnadsflödesproblemet att skicka 10 enheter från nod 1 till nod 6 i ovanstående nätverk på billigaste sätt. Starta med flödet 5 enheter vägen 1 - 2 - 4 - 6 och 5 enheter vägen 1 - 3 - 5 - 6. Använd simplexteknik för att finna optimallösningen. (3p)

c) Vad är den lägsta kostnaden för att färdigställa en produkt? Man vill även veta vad det kostar att komma till nod 5, eftersom slutbearbetningen skulle kunna göras på annan plats. Finn svaret genom att ignorera bågkapaciteterna och finna billigaste väg från nod 1 till nod 6 och från nod 1 till nod 5. (2p)

d) Ignorera bågkapaciteterna samt bågarnas riktning och finn billigaste uppspännande träd i grafen. Generellt sett, är det alltid så att ett billigaste uppspännande träd har högre kostnad än en billigaste väg i samma graf? Varför (inte)? (2p)