Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP88/TEN 1
OPTIMERING FÖR INGENJÖRER för EMM

Datum:	26 augusti 2011
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i normal omfattning får förekomma i boken.
Antal uppgifter:	4
Antal sidor:	5
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs normalt 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Firma Mixomax AB tillverkar tre olika produkter, benämnda Ding 1, Ding 2 och Ding 3, för den tyska marknaden. Man vill planera produktionen för månaden juli. Eftersom nästan all personal har semester i juli, vill man ställa in maskinerna för en viss produktion i slutet av juni, för att sedan låta fabriken arbeta nästan obemannad i en månad. Under den tiden kan man inte ändra produktmixen.

Man får använda högst 5 enheter av råvaran Stoff A per timme. Produktion av en enhet kräver 3 enheter av Stoff A för Ding 1, 1 enhet för Ding 2 och 4 enheter för Ding 3. Ett visst oönskat ämne, Verunreinigung B, uppstår vid produktionen, och mängden får inte överskrida 3 volymenheter (v.e.) per timme. Produktion av en enhet Ding 1 ger 2 v.e. av ämnet, produktion av en enhet Ding 3 ger också 2 v.e. av ämnet, medan produktion av en enhet Ding 2 faktiskt förbrukar en v.e. av ämnet. Dessutom har man i ett kontrakt med firma Merkel AG förbundet sig att inte tillverka mer än två enheter av Ding 1 och 2 tillsammans under en timme. Vinsten per enhet är 2 kr för Ding 1, 5 kr för Ding 2 och 4 kr för Ding 3. Man formulerar problemet att maximera vinsten för en timme under ovanstående bivillkor som följande LP-problem.

$$
\begin{array}{llrcrcrcll}
\max & z = & 2x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & & & \\
\text{då} & & 3x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & \leq & 5 & (1) \\
& & 2x_1 & - & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 3 & (2) \\
& & x_1 & + & x_2 & & & \leq & 2 & (3) \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

a) Lös problemet ovan med simplexmetoden. Ange optimallösning samt vilka bivillkor som är aktiva. (3p)

b) Hur mycket ökar vinsten om en enhet till av Stoff A kan användas per timme? Hur mycket ökar vinsten om ytterligare en v.e. av Verunreinigung B tillåts per timme? Hur mycket ökar vinsten om man får göra 3 enheter av Ding 1 och 2? (Beakta en av dessa ändringar i taget, och antag att ändringarna inte förändrar skuggpriserna. Använd resultatet i uppgift a.) (3p)

c) Miljödepartementet skickar ut en remiss där man frågar vilka följder en skärpning av utsläppskraven för Verunreinigung B skulle ge. Utgångspunkten för Mixomax AB är att optimallösningen inte får försämras alls. Hur mycket kan man gå med på att sänka gränsen för utsläpp per timme? (1p)

d) Formulera LP-dualen till problemet ovan. Ange optimal duallösning med hjälp av optimaltablån i uppgift a. Visa att komplementaritetsvillkoren är uppfyllda. (3p)

e) Plötsligt bestämmer man att antalet tillverkade enheter av varje sort varje timme måste vara heltal. Tillför detta krav till den givna modellen, och lös problemet med Land-Doig-Dakins trädsökningsmetod. Hur mycket förlorar man på denna begränsning, jämfört med lösningen i uppgift a?

Ledning: Det senast tillagda snittet är alltid aktivt. Tvådimensionella LP-problem får lösas grafiskt. Utnyttja resultatet i uppgift a. (3p)

Uppgift 2

Firma Kolora AB gör målarfärg. Man överväger att ändra blandningen något. Låt x_1 och x_2 vara mägden av två ingredienser som ska bestämmas. (Inga andra ingredienser ska ändras.) Färgen får inte innehålla mer än en viss mängd polyuretan, vilket ger bivillkoret $2x_1 + x_2 \leq 6$. En sammanvägd skadlig miljöpåverkan, som man vill minimera, ges av $f(x)$ nedan. Man får följande optimeringsproblem.

$$
\begin{array}{rrcl}
\min f(x) = & x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 - x_2 - 2x_1x_2 + 10 & & \\
\text{då} & 2x_1 + x_2 & \leq & 6 \\
 & x_1 & \geq & 0 \\
 & x_2 & \geq & 0
\end{array}
$$

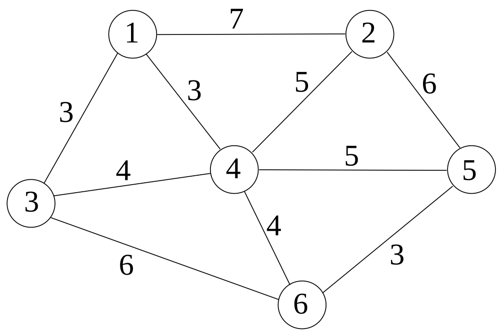
a) Rita upp det tillåtna området och identifiera varje extrempunkt. Sätt upp KKT-villkoren för problemet och kontrollera optimalitet för varje extrempunkt. (Ledning: För detta problem är KKT-villkoren nödvändiga för optimalitet.) (3p)

b) Man tror att optimum ligger i en punkt där både x_1 och x_2 är positiva. Kontrollera om detta stämmer med hjälp av KKT-villkoren. (2p)

c) Starta i origo och lös problemet med Zoutendijks metod. (Gör ej mer än tre iterationer.) (3p)

Uppgift 3

Noderna i nedanstående nätverk representerar olika stadsdelar i staden Byköping. Bågarna motsvarar hur ett utryckningsfordon kan ta sig mellan stadsdelarna, och bågkoefficienten anger hur lång tid det tar (i minuter). Alla bågar kan användas i båda riktningarna.



Konsulten OptiKnut har anlitats för att hjälpa till med placeringen av en ny brandstation.

a) OptiKnut tänker sig först att finna en billigaste sammanhängade graf som når alla stadsdelar. (Han tänker sig fasta rutter för brandbilarna.) Finn denna lösning åt honom. Ange metod samt vad problemet kallas. (2p)

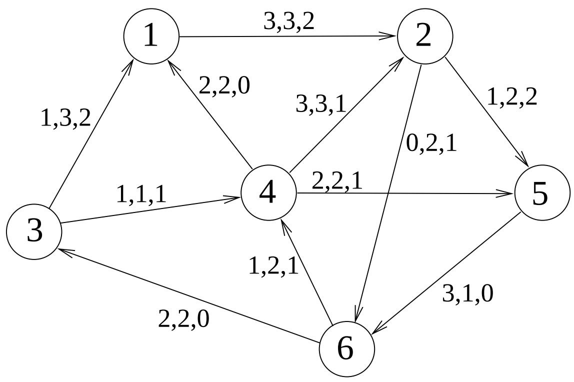
b) Efter sammanträde med stadsfullmäktige i Byköping, inser OptiKnut att man inte har löst problemet. Brandbilarna kommer ju att köra snabbaste vägen från brandstationen till aktuell stadsdel, och det är inte den lösningen man får i uppgift a. En politiker tycker att brandstationen ska ligga i centrum, nod 4, eftersom den noden ligger mest centralt. Hjälp OptiKnut att finna de snabbaste vägarna från nod 4 till alla andra. Ange metod samt vad problemet kallas. (Byköping är en ganska liten stad, så problemet är ganska lätt. Man kräver dock att det syns att en effektiv metod som skulle fungera bra på en större stad har använts.) En oppositionspolitiker anser att brandstationen ska ligga i nod 3, eftersom marken i centrum är mycket dyr, och bör användas till affärer. Hjälp OptiKnut att beräkna hur mycket sämre denna lösning skulle bli. Som mått kan man använda summan av utryckningstiden till varje stadsdel. (4p)

c) Man enas om att man inte kan enas om var brandstationen ska ligga, och ber OptiKnut att sätta upp ett optimeringsproblem som finner den bästa lösningen. Brandstationen kan placeras i vilken nod som helst. Man vill dels använda samma mått som i uppgift c, nämligen summan av avstånden från brandstationen till alla andra noder. Låt t_{ij} beteckna den kortaste tiden för att ta sig från nod i till nod j, vilket har beräknats i förväg (med Floyd-Warshalls metod). Detta mått multiplicerar man med faktorn α, som omvandlar tid till pengar. Dessutom adderar man kostnaden för att bygga brandstationen i nod i, f_i. Den därvid uppkomna totalkostnaden skall minimeras. Formulera detta som ett linjärt (blandat) heltalsproblem. Relatera gärna till något välkänt optimeringsproblem. (3p)

d) Polisen kontaktar OptiKnut och ber honom finna en snabbaste rundtur som ortens enda polisbil kan använda för att besöka samtliga stadsdelar. Vad kallas detta optimeringsproblem? Polisens egen utredare har kommit fram till att man i princip ska köra yttervarvet runt Byköping, men ta någon avstickare in mot centrum. OptiKnut kommer då på att det vore listigt att finna billigaste 1-träd, men med nod 4 som "nod 1". Gör detta. Ger det en användbar tur i detta exempel? Vilken information (relaterad till optimallösningen) ger detta i allmänhet (dvs. för alla möjliga exempel)? (3p)

Uppgift 4

Betrakta nedanstående nätverk med följande data på bågarna: kostnad, övre gräns, flöde (i denna ordning). Alla undre gränser är lika med noll.



a) Utgör flödet i grafen en *baslösning* i minkostnadsflödesproblemet att skicka 3 enheter flöde från nod 3 till nod 5 på billigaste sätt? Motivera. (2p)

b) Kan man skicka mer flöde från nod 3 till nod 5? Om svaret är ja, visa hur. Använd en metod. (3p)

c) Kan man skicka de tre enheterna från nod 3 till nod 5 på ett billigare sätt än i den givna startlösningen? (2p)