Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP88/TEN 1
OPTIMERING FÖR INGENJÖRER för EMM

Datum:	11 januari 2014
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i normal omfattning får förekomma i boken.
Antal uppgifter:	4
Antal sidor:	5
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs normalt 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Firma Tomtapå AB tillverkar leksaker som läggs i små julklappspåsar. Påsarna säljs hela. Produktansvarige Nisse A funderar nu på vilka leksaker man ska lägga i en påse. Han bedömer att tre saker, en liten tomte med två blinkande ögon, en liten pipande ren med blinkande röd nos och en liten julgran som spelar julsånger, är mest intressanta.

Tillgången av vissa råvaror till leksakerna är begränsad. Det krävs två lysdioder till varje tomte och en till varje ren. Man får inte använda fler än 5 lysdioder per påse. Renen och julgranen kräver ett litet ljudchip var, och man har bara tillgång till 3 chip per påse. En påse kan innehålla högst fyra (lika eller olika) saker. Vinsten per enhet är 4 kr för tomten, 1 kr för renen och 2 kr för granen. (Själva påsen ger ingen vinst.)

a) Formulera problemet att bestämma innehållet i en påse så att vinsten maximeras som ett LP-problem. (Man accepterar en ev. icke heltalig lösning.) (3p)

b) Lös problemet i uppgift a med simplexmetoden. Ange optimalt påsinnehåll, vinsten per påse samt vilka begräsningar som påverkar lösningen. (3p)

c) Nisse A funderar på att öka vinsten genom att satsa på ett av följande alternativ: skaffa flera lysdioder, skaffa flera ljudchip eller göra påsen lite större. (Antag att ansträngningen per enhets ändring av högerleden är likvärdig.) Vilket verkar vara bäst att satsa på? Vilket verkar vara sämst? (1p)

d) Tomtapå får plötsligt reda på att deras produkter omfattas av det nya *producentansvaret*, vilket betyder att man får ta ansvar för insamling och återvinning av leksaker man har producerat när de kasserats. Man bedömer att detta kommer att kosta 1 kr per leksak, vilket kan modelleras med att man minskar varje målfunktionskoefficient med en enhet. Kommer detta att ändra det optimala påsinnehållet? (Ledning: Utgå från optimaltablån i uppgift b och rätta till med radoperationer.) (2p)

e) En anställd, Nisse B, kommer på att man kan göra en liten snöboll av plast. Den innehåller ingen lysdiod och inget ljudchip, och ger en vinst på 1 kr per enhet, så Nisse B är säker på att man skulle tjäna på att tillverka den och ta med i påsen. (Man får dock fortfarande inte plats med mer än fyra saker i påsen.) Har Nisse B rätt? (Problemet ska inte lösas om från början.) (2p)

f) För att förenkla produktionsplanen bestämmer Nisse A att alla påsar ska ha samma innehåll, så antalet leksaker måste vara *heltal* för varje påse. Tillför detta krav till modellen i uppgift a, och lös problemet med Land-Doig-Dakins trädsökningsmetod. Hur mycket förlorar man på denna begränsning? Ledning: Det senast tillagda snittet är alltid aktivt. Tvådimensionella LP-problem får lösas grafiskt. Utnyttja resultatet i uppgift b. (3p)

Uppgift 2

Firma Blussa AB vill slå sig in på glöggmarknaden, och tänker sig ta fram en "optimal" kryddblandning (som ska hällas i rött vin och värmas). Det svåra tycks vara proportionerna mellan kardemumma och kanel. Låt x_1 och x_2 vara mängden av kardemumma repektive kanel. Blussas experter bestämmer att det inte får vara mer än 3 enheter kardemumma och 4 enheter kanel. Man har dock svårt att enas om målfunktionen, $f(x)$, som skall minimeras.

a) Den engelske konsulten Mulled anser att en bra approximation är $f(x) = 2x_1 + 3x_2$. (Högre ordningens termer kan, enligt honom, ignoreras.) Formulera problemet och lös på enklaste sätt. (1p)

b) Finska och svenska experter tar fram följande funktion som anses passa svensk smak bättre. $f(x) = 2(x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2 - x_1x_2$. Formulera problemet samt starta i origo och gör två iterationer med Zoutendijks metod för att finna en lösning. (3p)

c) Antag att inga bivillkor är aktiva i optimum, och ta fram alla stationära punkter till $f(x)$ i uppgift b. Är någon av dem en optimal lösning? (2p)

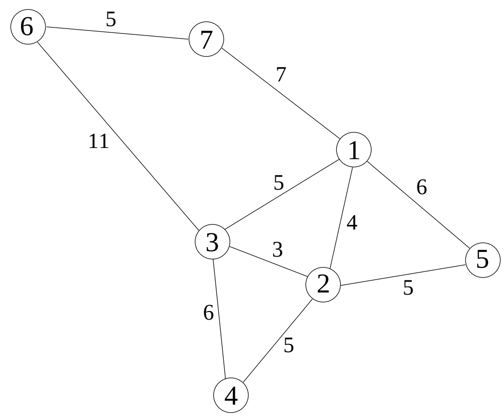
d) Den franske experten Chaud anser att målfunktionen i uppgift b kan förenklas till $f(x) = 2(x_1-2)^2+(x_2-2)^2$. Lös problem på enklaste sätt. Vilken betydelsefull egenskap skiljer problemet i denna uppgift mot det i uppgift b? (2p)

e) Tysken Glüh anser att mängden kanel inte får överskrida 2, men han accepterar den svensk-finska målfunktionen. Man kan använda första delen av lösningsgången i uppgift b. Gör detta, och gör ytterligare en iteration med Zoutendijks metod. Är den erhållna lösningen optimal? (2p)

f) Sätt upp KKT-villkoren för problemet i uppgift e. Kontrollera punkten som erhölls i uppgift e. Är den optimal? Alternativ (om du inte har löst uppgift e): Kontrollera huruvida $x_1 = 3$ och $x_2 = 2$ är en KKT-punkt till problem e. Är den optimal? (3p)

Uppgift 3

Det är julaftonskväll och tomten är nästan klar. Han har bara de centrala delarna av Rovaniemi kvar, vilka representeras av nedanstående graf. Tomten är trött och låter ledarrenen Rudolf styra släden.



Rudolf tittar ner på Rovaniemi och tänker att det handlar nog om att besöka varje nod exakt en gång och lämna av julklapparna där. Det är mycket snö, alla renarna är trötta och det är ingen trafik på gatorna, så Rudolf tänker att det är lika bra att följa gatorna (dvs. bågarna i grafen). Målet måste vara att minimera rundturens längd, och den ska start och sluta i nod 1 (tomtens hus). (Rudolf kan inga trafikregler, speciellt vet han inte vad en enkelriktad gata är.) Gatornas längder anges som bågkostnader i grafen.

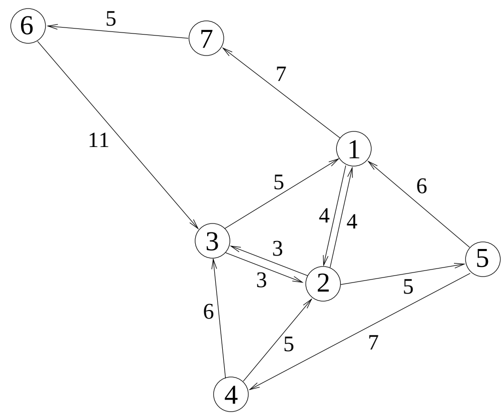
a) Tala om för Rudolf vad detta är för optimeringsproblem, och hur svårt det är teoretiskt (om Rudolf skulle få för sig att behandla hela världen på detta sätt).

Man kan reducera problemet för noder som har valens två. Gör detta så långt det går, och finn en tillåten lösning. (2p)

b) En tillåten lösning ger en övre gräns för det optimala målfunktionsvärdet. Finn en undre gräns genom att finna ett billigaste uppspännande träd i grafen. Finn en annan undre gräns genom att finna billigaste 1-träd i grafen. Jämför gränserna. (2p)

Uppgift 4

Politikerna i Rovaniemi blir plötsligt inspirerande av Linköpings trafiklösningar, och inför en mängd enkelriktningar. Den riktade grafen nedan beskriver de tillåtna riktningarna (fortfarande med gatulängd som bågkostnader).



a) Finn billigaste väg från tomtens hus (nod 1) till alla andra noder. Ange metod. (3p)

b) Hur många olika vägar finns det från nod 1 till nod 2? (Med "olika" menas att vägarna inte får innehålla någon gemensam båge. Gemensam nod är däremot tillåtet.) Formulera problemet som ett maxflödesproblem och lös med en korrekt metod. (3p)

c) Antag att det ligger fem säckar julklappar i nod 1 och tre säckar i nod 2 och att man vill flytta dem så att man får tre säckar i nod 6, tre i nod 4 och två i nod 5. Kostnaderna för att flytta säckarna är linjära i antalet säckar med angivna bågkoefficienter. Man kan skicka hur mycket som helst i bågarna.

Ett sätt att skicka är tre säckar vägen 1 - 7 - 6, två säckar 1 - 2, fem säckar 2 - 5 och 3 säckar 5 - 4. Antag att man får *vända* på *en* båge, dvs. ändra enkelriktningen på en gata. Vilken båge skulle man tjäna mest på att göra så med? (Ledning: Beakta bara bågar som inte används.) Besvara frågan med hjälp av teorin för simplexmetoden för nätverk. (3p)