Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP88/TEN 1
OPTIMERING FÖR INGENJÖRER för EMM

Datum:	2 juni 2012
Tid:	14.00-19.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar får förekomma i boken.
Antal uppgifter:	6
Antal sidor:	5
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs normalt 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Företaget MultiFlex AB funderar på att börja använda den gamla svarven som står oanvänd i ett hörn. Man kan göra ljusstakar och/eller stolsben med den. En ljusstake ger vinsten 30 kr och ett stolsben 10 kr. En ljusstake kräver uppborrning av två hål, och borrmaskinen är så upptagen att man högst kan borra 5 hål per timme. Svarven är långsam och det tar 18 minuter att göra en ljusstake eller ett stolsben. Ett stolsben använder tre skruvar, och man kan få fram högst 8 skruvar per timme.

Problemet att bestämma hur svarven ska användas så att vinsten maximeras kan formuleras som ett optimeringsproblem på följande sätt, där x_1 står för antalet ljusstakar man gör per timme och där x_2 antalet stolsben man gör per timme.

$$
\begin{array}{llrcrcrl}
\max & z = & 30x_1 & + & 10x_2 & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & & & \leq & 5 & (1) \\
 & & 18x_1 & + & 18x_2 & \leq & 60 & (2) \\
 & & & & 3x_2 & \leq & 8 & (3) \\
 & & x_1, & & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

En utbildad ingenjör påpekar att bivillkor 2 kan ersättas med $x_1 + x_2 \leq 10/3$. En annan ingenjör påpekar att variablerna bara bör få anta heltaliga värden.

a) Lös heltalsproblemet med Land-Doig-Dakins trädsökningsmetod. Tvådimensionella LP-problem får lösas grafiskt. Gå ner i $\leq$-grenen först. Förgrena (om möjligt) över x_1 först. (Förändringarna i uppgift b får inte användas här.) (3p)

b) En bättre utbildad ingenjör påpekar att problemformuleringen är onödigt dum. Om man tänker på heltaligheten kan vissa bivillkor skrivas på ett bättre sätt. Gör dessa förändringar i problemet, och avgör hur lösningsgången i uppgift a skulle förändras. Grafisk motivering får användas. (2p)

c) Man bestämmer att det inte är tillåtet att göra både ljusstakar och bordsben, utan produktionen ska vara antingen ljusstakar eller bordsben. Gör nödvändiga omformuleringar (tillägg av bivillkor etc) av modellen för att detta bivillkor ska gälla. (Man ska inte lösa problemet, utan bara formulera modellen.) (2p)

d) Betrakta problemet och lösningen i uppgift a. Man bestämmer sig för att räkna målfunktionsvärde i hela tiotal kronor, så målfunktionen blir $z = 3x_1 + x_2$. Förändrar det lösningsgången i uppgift a? (1p)

Uppgift 2

Betrakta problemet i uppgift 1. MultiFlex bestämmer sig för att strunta i heltalskravet och se vad man kan få fram genom att studera LP-problemet.

a) Lös problemet med simplexmetoden. Ange optimal lösning samt vilka begränsningar som direkt påverkar lösningen. (3p)

b) Utgå från optimallösningen i uppgift a. Vilket verkar bäst: Att kunna borra ett hål till per timme eller att få fram en skruv till per timme? Motivera. (1p)

c) Formulera LP-dualen till LP-problemet som löstes i uppgift a. Ange optimal duallösning med hjälp av optimaltablån i uppgift a. Visa att komplementaritetsvillkoren är uppfyllda, och förklara den ekonomiska betydelsen av dem. (3p)

d) En outbildad anställd kommer på att man kan göra ett runt brännbollsträ med svarven. Det tar 27 minuter att göra ett sådant, det kräver ingen borrning eller skruvar, och det ger vinsten 17 kr per trä. Inför en ny variabel i problemet som möjliggör detta. Verkar denna produkt lönsam att göra? Svara på frågan med hjälp av reducerad kostnad. (Lös ej färdigt, och lös ej om från början.) (1p)

Uppgift 3

Betrakta problemet i uppgift 1, speciellt variabeldefinitionen. Genom att studera spillet av de olika träslagen man använder sig av, energiförbrukningen av svarven, samt ta hänsyn till att en viss del av förtjänsten används för miljöförbättrande åtgärder, finner man att den totala miljöpåverkan av svarvens verksamhet kan beräknas som $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 6x_1 - 10x_2 + x_1x_2 + 16$.

a) Betrakta problemet att minimera $f(x)$, givet ovan, under följande bivillkor:

$$
\begin{array}{rcrcll}
2x_1 & & & \leq & 5 & \quad (1) \\
x_1 & + & x_2 & \leq & 3 & \quad (2) \\
 & & x_2 & \leq & 2 & \quad (3) \\
x_1 & & & \geq & 0 & \quad (4) \\
 & & x_2 & \geq & 0 & \quad (5)
\end{array}
$$

Starta i origo och lös problemet med Zoutendijks metod. (3p)

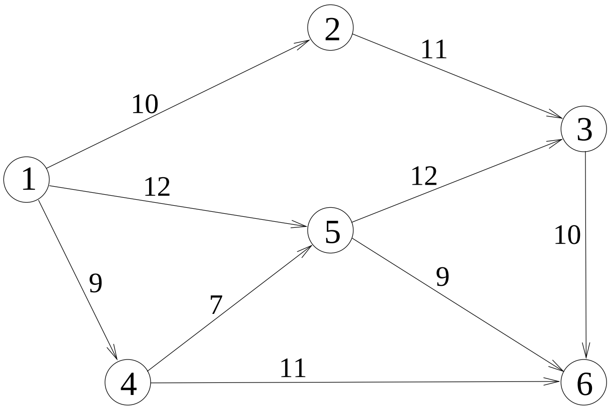
b) Beräkningsavdelningen på MultiFlex tycker att det är krångligt med bivillkor, och vill istället finna samtliga stationära punkter till funktionen $f(x)$ och avgöra om de är lokala min eller max, och om någon är globalt min till funktionen. Gör detta. Uppfyller punkterna bivillkoren i uppgift a? (2p)

c) Sätt upp KKT-villkoren för problemet i uppgift a. Kontrollera huruvida följande punkter är KKT-punkter och optimalpunkter:
$x^{(1)} = (5/2, 1/2) = (2.5, 0.5)$, $x^{(2)} = (2, 1)$, $x^{(3)} = (2, 2)$, $x^{(4)} = (1, 1)$.
(Man får inte använda resultaten från uppgift a och b.) Ledning: I detta problem

är KKT-villkoren nödvändiga för optimalitet. (3p)

Uppgift 4

Det riktade nätverket nedan motsvarar möjliga transportvägar i en större fabrikslokal. På varje båge står transportiden i minuter. Varje nod motsvarar en station i fabriken.

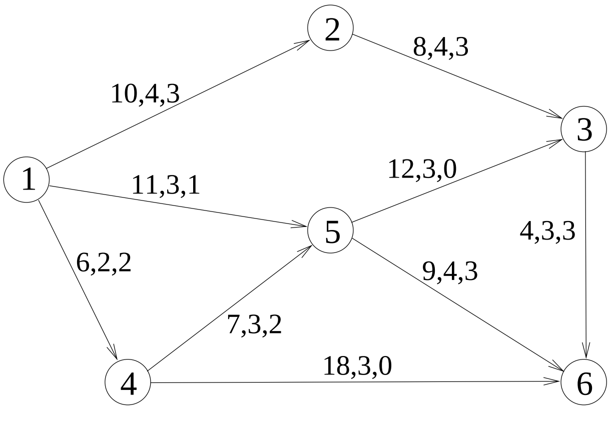


a) Finn snabbaste vägen från station 1 till station 6 samt snabbaste vägen från station 1 till station 3. (2p)

b) Man funderar på att införa en ny möjlighet i form av en båge från station 2 direkt till station 6. Hur lång tid får den högst ta för att snabbaste vägen från station 1 till station 6 ska gå via den bågen? Använd nodpriser. (1p)

Uppgift 5

Det riktade nätverket med bågkostnader, kapaciteter och flöde nedan (undre gränser är noll) motsvarar en vidareutvecklad modell för fabriken i uppgift 4. Uppgiften är att skicka 6 enheter från station 1 till station 6 så att den totala kostnaden minimeras.

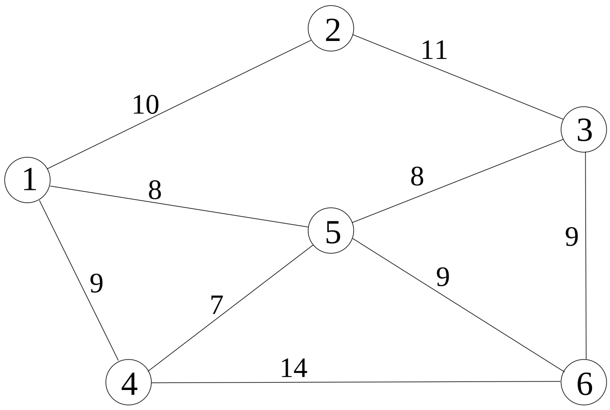


a) Visa med simplex-teknik att lösningen inte är optimal. Välj en inkommande variabel och gör en iteration i simplexmetoden. Avgör om den erhållna lösningen är optimal. (3p)

b) Antag istället att alla bågarna har kapacitet 2. Finn maxflöde från station 1 till station 6. Starta med att skicka två enheter vägen 1 - 2 - 3 - 6 och två enheter vägen 1 - 4 - 5 - 6. Ange ett snitt som skiljer nod 1 från nod 6 som *inte* är ett minsnitt. (3p)

Uppgift 6

Det oriktade nätverket med bågkostnader nedan representerar möjliga sätt att förbinda stationerna i fabriken med telekommunkationskabel.



a) Finn billigaste sätt att koppla ihop alla stationer. Ange metod, samt totalkostnad. (1p)

b) Finn billigaste 1-träd i grafen. Ange totalkostnad. (1p)

c) Finn en handelsresandetur med valfri heuristik. Ange totalkostnad. (1p)

d) Utnyttja resultaten i uppgift a, b och c och ange gränser för kostnaden för den billigaste handelsresandeturen. (1p)

e) Antag att alla bågar i grafen ovan motsvarar ledningsgator där man kan placera kabel, och man vill löpa igenom alla ledningsgator för att se att de är hela. Finn därför billigaste brevbärartur till grafen ovan. Matchningsproblem får lösas med inspektion. (3p)