Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP88/TEN 1
OPTIMERING FÖR INGENJÖRER för M/EMM

Datum:	26 oktober 2012
Tid:	14.00-19.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	7
Antal sidor:	6
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs normalt 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Firma Petson & son tillverkar PET-flaskor och man håller på att ta fram en ny plastblandning genom att blanda in tre nya (hemliga) ämnen, kallade ämne Q, R och S. Flaskornas egenskaper påverkas av hur mycket man använder av de nya ämnena. Låt x_j vara mängden (i mg) av ämne j som tillsätts i plastmängden motsvarande en flaska. (Vill du byta Q, R och S mot 1, 2 och 3, är det tillåtet.)

Ändringen av hårdheten (H) hos flaskan blir $H = 2x_Q - x_R$ och ändringen av elisticiteten (E) hos flaskan blir $E = -2x_Q + x_R + x_S$. Dessutom ändras färgen, gulheten (G) ökar med $G = x_Q + 2x_R + 2x_S$.

På grund av subventioner från ett kemiföretag får Petson & son en vinst på 2 kr/mg för ämne Q, 1 kr/mg för ämne R och 4 kr/mg för ämne S.

Petson d.y. formulerar optimeringsproblemet att finna den blandning som maximerar vinsten, samtidigt som ändringen av hårdheten inte får vara större än 10 (annars finns risk att flaskan spricker), ändringen av elasticiteten inte blir större än 6 (annars finns risk att flaskan deformeras) och att gulheten inte öker med mer än 20 (annars ser vissa drycker oaptitliga ut).

$$
\begin{array}{llrcrcrcrl}
\max & z = & 2x_Q & + & x_R & + & 4x_S & & & \\
\text{då} & & 2x_Q & - & x_R & & & \leq & 10 & \quad (H) \\
& - & 2x_Q & + & x_R & + & x_S & \leq & 6 & \quad (E) \\
& & x_Q & + & 2x_R & + & 2x_S & \leq & 20 & \quad (G) \\
& & x_Q, & & x_R, & & x_S & \geq & 0 &
\end{array}
$$

a) Hjälp Petsons att lösa problemet med simplexmetoden. Ange optimal vinst, optimallösning samt vilka bivillkor som är aktiva. (3p)

b) Finns det någon optimallösning där ändringen i elasticitet är (strikt) mindre än 6? (Svaret måste givetvis motiveras, men man behöver inte räkna ut en ev. ny lösning.) (1p)

c) Formulera LP-dualen till problemet ovan. Ange optimal duallösning med hjälp av optimaltablån i uppgift a. Visa att komplementaritetsvillkoren är uppfyllda. (3p)

d) Man funderar på att släppa lite på något av kraven, dvs. öka ett av högerleden i bivillkoren lite. Vilket högerled skulle man tjäna mest på att öka? (Ledning: Använd skuggpriser.) (1p)

e) Petson d.ä. anser att elasticiteten inte får öka alls, så han sätter högerledet i motsvarande bivillkor till noll. Antag att den optimala basen inte ändras, och beräkna den nya lösningen genom att läsa ut B^{-1} ur optimaltablån och beräkna nya lösningen med hjälp av den. Är den därvid erhållna lösningen optimal? (Om du, liksom Petson d.ä., misstror matrisräkning, får du lösa om problemet med simplexmetoden från början om du vill. Det tar dock längre tid.) (2p)

f) Betrakta problemet i uppgift a. Det visar sig att livsmedelsverket har förbjudit ämne R, samt att de andra ämnena enbart säljs i hela förpackningar. Detta får till följd att x_R kan fixeras till noll, och att antalet mg av varje ämne i varje flaska måste vara heltal.

Lös heltalsproblemet med Land-Doig-Dakins trädsökningsmetod. Tvådimensionella LP-problem får lösas grafiskt. (Börja, om möjligt, med lösningen i uppgift a.) Hur mycket förlorar man på heltalskravet, jämfört med LP-lösningen? (3p)

Uppgift 2

Petson & son byter namn till Petson & sonson, eftersom sonen flyttar till Galapagosöarna och ersätts av sonsonen Melvin, som just tagit civilingenjörsexamen.

Melvin förkastar hela tänkandet i uppgift 1. Hårdhet och elasticitet tillhör det förflutna. Nu är det miljön man ska tänka på. Genom avancerade beräkningar kommer han fram till att den miljöpåverkan de två ämnena ger (om flaskan slängs och inte återvinns) är en olinjär funktion, $f(x) = 2x_Q^2 + x_S^2 - x_Q x_S - 4x_Q - 2x_S$. (Ämne R är fortfarande förbjudet.)

Dessutom ersätter han bivillkoren med följande, helt utan förklaring:
$x_Q + 2x_S \leq 3$ och $x_Q \leq 1$ (samt $x_Q \geq 0$ och $x_S \geq 0$).
Han vill givetvis minimera miljöpåverkan.

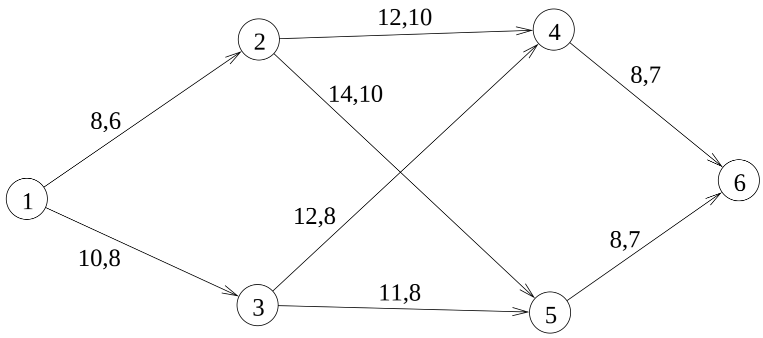
a) Är riktningen (1, 0) en tillåten avtaganderiktning i origo? (1p)

b) Lös problemet med Zoutendijks metod. Starta i origo. Tvådimensionella LP-problem får lösas grafiskt. Illustrera KKT-villkoren grafiskt i den erhållna punkten. Beräkna KKT-multiplikatorerna. (4p)

Uppgift 3

Petson & sonson får 10 ton tomma plastflaskor för återvinning varje dag. Dessa tas om hand och smältes ned vid två anläggningar (nod 2 och 3). Från dessa skickas materialet till två andra anläggningar (nod 4 och 5) där plasten formas till nya flaskor. (Vi antar att vikten inte förändras genom processerna.) Frågan är hur mycket som ska göras vid de olika anläggningarna.

Följande nätverk representerar situationen, med nod 1 som källan där 10 ton dyker upp och nod 6 sänkan där 10 ton försvinner. Nod 1 och 6 finns inte fysiskt, utan är införda för att man ska ha frihet i att bestämma hur mycket som ska hanteras av de olika anläggningarna. På varje båge anges kostnad (per ton) och kapacitet (dvs. hur många ton som högst får skickas där per dag). Man ser bl.a. att nod 2 får ta emot högst 6 ton och nod 3 högst 8 ton, medan nod 4 och 5 får hantera högst 7 ton var.



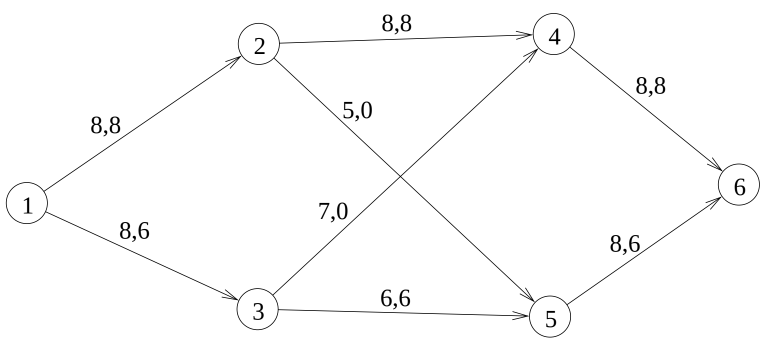
a) Melvin påstår att det är billigast att skicka 6 ton vägen 1 - 2 - 4 - 6 och 4 ton vägen 1 - 3 - 5 - 6. Stämmer det? Motivera svaret med hjälp av simplexteknik i nätverk. (2p)

b) Det visar sig att anläggningen i nod 2 kan ta emot upp till 8 ton per dag (istället för 6). Förändrar det optimallösningen? Om så är fallet, starta med resultatet i uppgift a och fortsätt att finna ett minkostnadsflöde med simplexteknik. (2p)

Uppgift 4

Betrakta situationen i uppgift 3. Nu vill man helt enkelt veta hur mycket tomflaskor man maximalt kan hantera (dvs. skicka från nod 1 till nod 6) per dag.

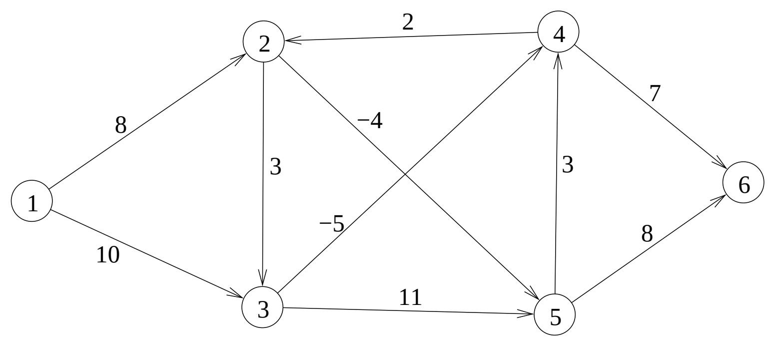
Bågarna i nedanstående nätverk är märkta med kapacitet (övre gräns) samt flöde. Alla bågar har undre gräns noll.



Är flödet maximalt från nod 1 till nod 6? Motivera ja-svar. Vid nej-svar: finn maxflöde från nod 1 till nod 6. Starta med angivet flödet. Följ metoden noga, bl.a. när det gäller vägsökningen. (3p)

Uppgift 5

I cykeltävlingen Plusgirot Open har man bestämt att en etapp ska gå från nod 1 till nod 6 i nedanstående nätverk. På bågarna finns bågkostnader som anger hur mycket det skulle kosta att utnyttja delsträckorna. Vissa orter vill gärna att loppet dras på deras väg, och är därför villiga att betala för detta (vilket ger negativa bågkostnader). Man har inte bestämt hur lång etappen ska vara, utan låter det bestämmas av det överordnade beslutet, nämligen att minimera kostnaden för sträckdragningen. Om man skulle använda en viss delsträcka är dock riktningen bestämd, för att få lämpliga uppförsbackar.



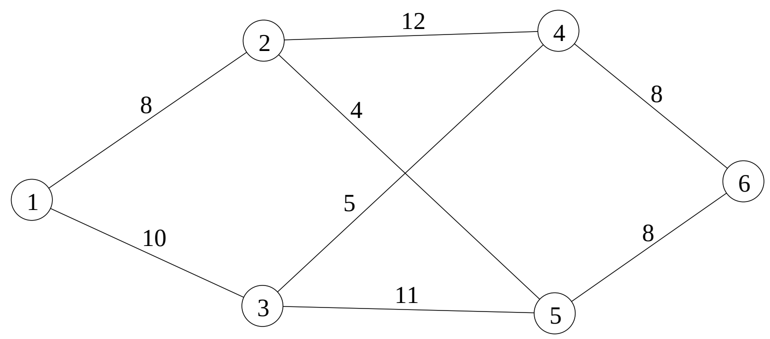
a) Finn billigaste väg från nod 1 till nod 6. Välj metod och följ den noga och tydligt. (2p)

b) Ange optimala nodpriser för alla noder. (1p)

c) Skriv upp det duala bivillkoret som motsvarar båge (5, 4). För vilka värden på bågkostnaden c_{54} skulle nuvarande duallösning (nodpriser) inte vara tillåten, och vad innebär det för den primala lösningen? (2p)

Uppgift 6

Nedanstående nätverk är det som kanske ska användas i Plusgirot Open. Man behöver inspektera banan på olika sätt, och ska därför köra runt med en bil och kontrollera vissa saker. (Bågarna kan användas i valfri riktning.) Man ska starta och sluta i nod 1, och vill minimera kostnaderna för rundturen baserad på bågkostnaderna i grafen.



a) Man vill kontrollera förhållandena vid varje korsning, dvs. noderna i grafen. Finn billigaste 1-träd i grafen. Vad säger denna lösning om optimalkostnaden för det problem man verkligen vill lösa? (3p)

b) Man vill inspektera varje vägsträcka, bl.a. för att se att det inte finns hål i asfalten som kan göra att en cyklist kör omkull. Vilket optimeringsproblem är det? Hur många bågar måste man köra minst två gånger? Vilka? (2p)

Uppgift 7

Albin, Beata, Cedric och Dagny ska skriva fyra kapitel i en rapport: introduktion, problembeskrivning, metodbeskrivning samt resultat. De är olika snabba på att skriva olika saker, och därför har de tillsammans gjort en bedömning av hur lång tid det skulle ta för varje person att skriva varje kapitel. Varje person ska skriva ett kapitel (och alla kapitel ska bli skrivna), och man vill bestämma vem som ska göra vad så att den totala tiden minimeras. Tiderna ges i nedanstående matris, där raderna står för personer och kolumnerna för kapitel.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

a) Lös problemet med ungerska metoden. (3p)

b) Beata vill skriva två kapitel, vilket betyder att någon annan slipper. Finn en sådan optimallösning utan att lösa om problemet. Ledning: Använd den optimala duallösningen i uppgift a. Vem slipper? (2p)