Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP88/TEN 1
OPTIMERING FÖR INGENJÖRER för M/EMM

Datum:	8 januari 2013
Tid:	14.00-19.00
Hjälpmedel:	Miniräknare Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering* Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	7
Antal sidor:	6 Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad. Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs normalt 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Firma K-plast säljer bl.a. snöslungor, och funderar på inköp och lagerhållning inför vintern. Man planerar för n månader. I butiken i Linköping förväntar man sig sälja d_j slungor i månad j. Man har L_0 snöslungor i lager innan första månaden men vill inte ha några i lager efter sista månaden.

Inköpskostnaderna är inte linjära, utan konkava, baserat på hur många som köps vid samma tillfälle. Inköpen sker en gång i månaden, närmare bestämt i början av varje månad, och man kan köpa högst K stycken vid samma tillfälle. Inköpskostnaderna ges av funktionen $c_j(x_j)$ där x_j är antalet slungor som köps in vid samma tillfälle.

Lagerkostnaden är linjär, l_j per slunga, och baseras på antalet i lager vid slutet av varje månad. Man har inte plats att lagra mer än L slungor från en månad till nästa. Målet är att uppfylla behovet till minimal kostnad.

Hjälp K-plast att formulera problemet som ett optimeringsproblem. (3p)

Uppgift 2

Firma TungTransport AB har fått beställningar på transporter av fyra stora maskiner (traktorer) från Linköping till Jönköping. Man kommer att göra en körning med sin lastbil, som inte kan ta mer än 11 ton. Eftersom den totala tyngden av beställningarna överstiger 11 ton, kan man inte ta med alla maskinerna, och de man inte tar med kommer troligen att transporteras av en annan transportör. Därför vill man välja vilka transporter man accepterar, så att man maximerar sina intäkter. Intäkt och vikt för varje maskintransport ges av nedanstående tabell.

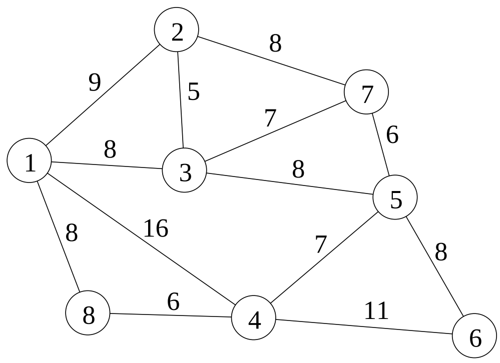
Maskin	Intäkt	Vikt (ton)
1	2	4
2	3	5
3	4	4
4	4	5

a) Formulera problemet att välja vilka transporter man ska göra som ett binärt kappsäcksproblem. (1p)

b) Lös problemet med Land-Doig-Dakins trädsökningsmetod. Var noga med att notera övre och undre gränser som fås under proceduren. Ledning: LP-relaxationen kan lösas som beskrives i avsnitt 7.5 i boken. (3p)

Uppgift 3

Österköpings kommun håller på att planera sandning och saltning av gatorna inför kommande snöfall. Man vill därvid kontraktera bönder från den omgivande landsbygden för att med sina traktorer hjälpa till. Nedanstående nätverk motsvarar de gator som bonden Rask har fått på sin lott. Bågkoefficienterna anger avstånd.



Han ska köra runt sin traktor och sanda alla gatorna i området, och det ska ske så snabbt som möjligt. Han räknar med att han kör med någorlunda konstant hastighet.

Efter tre snöfall med efterföljande sandningar, upptäcker Rask att han varje gång har fått köra på redan sandade gator för att nå de osandade. Han börjar misstänka att han planerar sin körning på ett dåligt sätt.

a) Hjälp bonden Rask att finna det bästa sättet att köra runt och sanda. Han vill sluta i samma korsning som har startade i. Finns det någon möjlighet att undvika att köra på redan sandade gator? Om inte, finn en lösning där man kör minimal sträcka på sandade gator. (3p)

b) Rask bestämmer sig för att lägga upp ett litet sandlager i varje korsning. Detta gör han innan snön börjar falla. Även denna gång vill han köra en rundtur som är så kort som möjligt. Tala om för Rask vilket optimeringsproblem detta är, och hur svårt det är (teoretiskt). Finn en tillåten och ganska bra lösning (med lämplig metod). Finn även en optimistisk uppskattning av längden av den optimala turen, så Rask får veta hur långt ifrån optimum lösningen är. (3p)

c) Kommunen bestämmer att det inte får ligga sandhögar i varje korsning, utan all sand ska ligga i nod 1. Rask vill köra fram och tillbaka mellan nod 1 och varje annan nod, så för att flytta sanden på effektivaste sätt vill han finna billigaste väg från nod 1 till alla noder. Hjälp honom med det. (För att finna billigaste väg i en oriktad graf beaktar man bara båda riktningarna av en båge när man kontrollerar nodpriser.) (3p)

Uppgift 4

Österköpings kommun fortsätter att planera sandning och saltning av gatorna. Man har två sorters sand, och funderar på att använda en blandning av dessa två sorter.

Vi betraktar en last vägsand, och låter x_1 vara mängden sand av sort 1 och x_2 mängden sand av sort 2 i lasten. Lasten ska transporteras med en viss traktor, som har gränser för både volym och vikt. För att inte få för stor volym, kräver man att $x_1 + x_2 \leq 3$. För att inte det inte ska väga för mycket, kräver man att $3x_1 + x_2 \leq 6$.

Efter visst funderande kommer man fram till att nyttan av lasten maximeras genom att maximera målfunktionen $z = 2x_1 + x_2$. (Sandsort 1 anses ge bättre väggrepp än sort 2.)

a) Skriv upp hela problemet som ett LP-problem, och lös problemet med simplexmetoden. (3p)

b) Man kan, genom en viss ombyggnad av traktorn, göra så att den maximala volymen ökar med 0.2 och den maximala tyngden minskar med 0.1. Fås en bättre optimallösning till ovanstående problem om denna ombyggnad görs? (Lös ej om problemet. Använd istället skuggpriser för att motivera svaret.) (2p)

c) Formulera LP-dualen till problemet ovan och ange optimal duallösning. (2p)

Uppgift 5

Österköpings kommun tänker om lite när det gäller sandning och saltning av gatorna. Det visar sig (se uppgift 4) att sandsort 2 innehåller vissa mängder salt. För att inte sanden ska frysa ihop till en stor klump, behövs små mängder salt i sanden. Detta är dock en känslig fråga, eftersom salt ger mera rost på bilarna och är dåligt för miljön. Många bilister argumenterar för helt saltfria vägar, men då går det inte att sprida ut sanden på ett bra sätt. Av dessa skäl vill man optimera tillsatsen av salt, när man bestämmer blandningen av de två sandsorterna.

Använd samma variabeldefinition och samma bivillkor som i uppgift 4. Den negativa effekten av saltet i blandningen summeras till följande olinjära miljökostnad, $f(x) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_1 + 5x_2 - x_1x_2$.

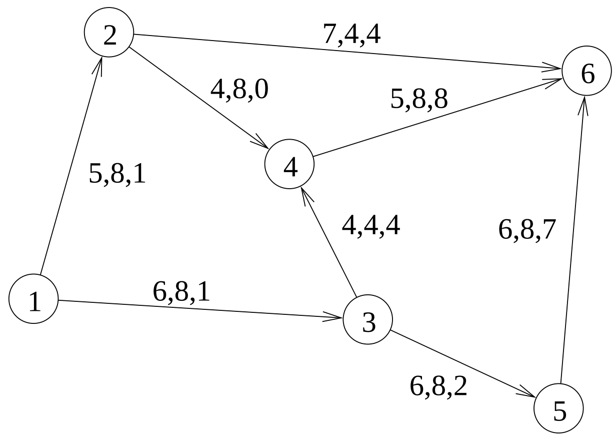
a) Skriv upp hela problemet att minimera miljökostnaden. Finns det någon tillåten avtaganderiktning i origo? Vad betyder detta resultat? (2p)

b) Lägg till bivillkoren $x_1 + x_2 \geq 2$ (en minsta storlek för en last) och $x_2 \geq x_1$ (inte för lite salt) till problemet i uppgift a. Lös problemet med Zoutendijks metod. Starta i punkten $x_1 = 0$, $x_2 = 2$. Tvådimensionella LP-problem får lösas grafiskt. (3p)

c) Kontrollera om punkten $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ är en KKT-punkt i problemet i uppgift b. Illustrera KKT-villkoren grafiskt i punkten. (3p)

Uppgift 6

Efter tre dagars intensivt snöande ligger stora snöhögar vid nästan varje korsning. Dessa ska nu flyttas bort till snöupplaget i nod 6 i nedanstående graf. Snölassen blir stora och tunga, och man räknar med en kostnad för avgaser mm som avståndet gånger tyngden för varje transport.



Mängden snö i de olika noderna ges av följande tabell.

Nod	Snömängd (ton)
1	2
2	3
3	5
4	4
5	5

Den nyanställde ingenjören Emila noterar att detta liknar ett minkostnadsflödesproblem, där flödet är antal förflyttade ton snö, och man vill minimera de linjära kostnaderna för att flytta snön. Genom att sätta nod 6 till en sänka av styrka 19 fås ett minkostnadsflödesproblem. Vissa gator är så smala att man inte får plats att använda den största traktorn. Man kan då inte transportera hur mycket som helst på en sådan gata. Man har (med tumregler) räknat ut ett sätt att flytta snön, dvs. ett tillåtet flöde. På bågarna i grafen anges avstånd, övre gräns för transporterad mängd samt flödet i den tillåtna lösningen.

a) Är den angivna lösningen den som kostar minst av alla tillåtna lösningar? Om inte, finns den billigaste lösningen med hjälp av simplexmetoden för nätverk. (3p)

b) Genom att gena över en naturpark kan man forsla snö från nod 3 till nod 6. Denna “gata” får avståndet 10. Denna lösning uppskattas inte av de närboende, så man utnyttjar denna möjlighet endast om det ger en besparing så att totalkostnaden sänks med minst 10. Ska man utnyttja den? (2p)

Uppgift 7

Fyra traktorförare ska plöja snö med fyra olika traktorer, och frågan är vem som ska ta vilken. De har olika erfarenheter av olika fordon, och är därför olika skickliga. Nedanstående matris anger hur lång tid det tar för de olika traktorförarna (raderna) att röja sitt område med de olika traktorerna (kolumnerna).

$$C = \begin{pmatrix} 7 & 7 & 5 & 8 \\ 5 & 5 & 4 & 6 \\ 6 & 7 & 6 & 9 \\ 8 & 6 & 5 & 7 \end{pmatrix}$$

a) Finn bästa tillordningen av förare till traktorer med ungerska metoden. (2p)

b) Ange optimala värden på dualvariablerna. (1p)

c) Hur ändras primal och dual lösning om förare 2 blir 2 enheter snabbare på alla traktorer? (1p)