Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP88/TEN 1
OPTIMERING FÖR INGENJÖRER för M/EMM

Datum:	29 maj 2013
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	6
Antal sidor:	5
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs normalt 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

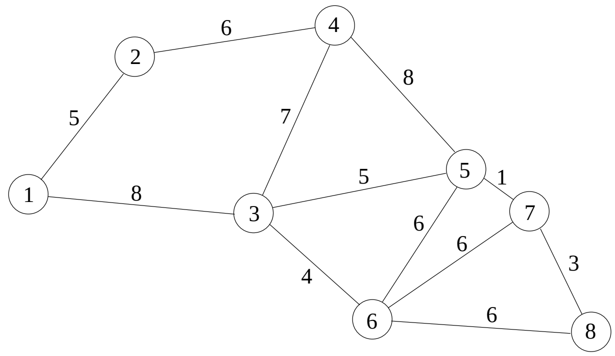
Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Emfrid ska åka till Prag och gå på museer. Nedanstående graf visar de museer han vill gå på, samt möjliga vägar mellan dem. På bågarna anges avståndet.



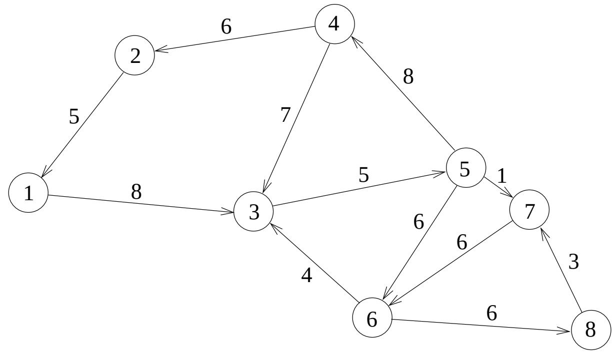
a) Emfrid vill göra en rundtur som passerar varje museum exakt en gång. Eftersom han fotvandrar i gassande sol, vill han gå en så kort sträcka som möjligt. En turistbroschyr föreslår turen 1 - 2 - 4 - 5 - 7 - 8 - 6 - 3 - 1. Emfrid undrar om turen verkligen är den kortaste. Hjälp honom att hitta en undre gräns för den optimala sträckan genom att lösa en relaxation av problemet. Ange övre och undre gränser för längden av den kortaste rundturen. (Det man ska göra i uppgift b får inte utnyttjas här.) (3p)

b) Balas metod använder bivillkorsfixering, dvs. om ett bivillkor inte tillåter att $x_j = 1$, fixeras x_j till 0 (och tvärtom). Samma princip kan användas på problemet i uppgift a. En variabel motsvarar då om en viss båge ska vara med eller inte i rundturen. Bivillkor man kan använda är att alla noder ska ha valens två samt att mindre rundturer ej tillåts. Använd denna teknik för att fixera så mycket som möjligt av lösningen. (3p)

c) Pragს turistbyrå bestämmer sig för att asfaltera alla vägar mellan museerna. Asfaltsmaskinen går långsamt och är ett stort trafikhinder (även när den inte asfalterar), så man vill att maskinen ska köra så kort sträcka som möjligt. Maskinen står i ett garage vid nod 1, och ska återvända dit när alla gator är asfalterade. Finn bästa rundturen för maskinen. (3p)

Uppgift 2

Stadsplanerarna i Prag åker på studieresa till Linköping, och blir mycket imponerade av det omfattande bruket av enkelriktningar i stadens centrum. Man vill därför göra likadant i Prags centrum. Följande riktade graf visar en plan för hur man vill enkelrikta gatorna mellan Prags museer. Bågkoefficienterna anger avstånd.



a) Det visar sig att bilturister ofta ankommer till nod 7 (från en större trafikled). Därför funderar planerarna på hur långt det är från nod 7 till varje annan nod. (Man tänker sig att varje bil kör närmaste vägen från nod 7 till ett av museerna, och tar ej hänsyn till vad de gör efter det.)

Hjälp stadsplaneringskontoret i Prag att finna avståndet från nod 7 till varje annan nod med hjälp av en billigaste vägmetod. (3p)

b) Man kan tillåta en ändring av *en* enkelriktning, dvs. den tillåtna riktningen på en gata kan vändas. Vilken av bågarna som ansluter till nod 7 skulle du välja? Motivera med nodpriser från lösningen i uppgift a. (2p)

c) Ibland blir det fullständigt stopp i trafiken på någon gata, och man måste ta en annan väg. Då kan man vara intresserad av hur många olika vägar det finns mellan två punkter. (Med olika vägar menas att de inte får använda samma gata/båge. De får dock passera samma korsning/nod.) Detta kan man ta reda på genom att sätta bågkapacitet ett på alla bågar och finna maxflöde mellan de två punkterna. Använd denna teknik för att ta reda på hur många olika vägar det finns från nod 5 till nod 3. Ange minsnitt. (Ändringen i uppgift b ska ej beaktas här.) (3p)

Uppgift 3

Företaget Combina AB köper in skruvmejslar av olika typ och kombinerar ihop dem i olika skruvmejselsatser, som sedan säljs med bra vinst. Man har nu köpt in 5000 st skruvmejslar för spårskruvar, 4000 st för krysspår samt 5000 st för torxskruvar. Man funderar på att sätta ihop dessa till tre olika satser, där sats 1 har en spår- och en torxmejsel, sats 2 har två spår- och en kryssmejsel, och sats 3 har en kryss- och två torxmejslar. Vinsten per sats är 1 kr för sats 1, 10 kr för sats 2 och 4 kr för sats 3. Frågan är helt enkelt hur många satser man ska göra av varje sort, för att maximera vinsten.

Man sätter upp en linjär optimeringsmodell, där x_j är antalet satser av typ j, för $j = 1, 2, 3$. Vinsten blir $x_1 + 10x_2 + 4x_3$. De tre mejselsorterna ger bivillkoren $x_1 + 2x_2 \leq 5000$, $x_2 + x_3 \leq 4000$, $x_1 + 2x_3 \leq 5000$. Man har även $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ och $x_3 \geq 0$.

a) Lös problemet med simplexmetoden. Ange optimallösning samt om några mejslar blir över. (3p)

b) Man kan skaffa ytterligare 10 mejslar av valfri sort. Vilken ska man välja för att öka vinsten så mycket som möjligt? (Ledning: Inga skuggpriser ändras av denna ändring.) (1p)

c) Formulera LP-dualen till problemet och ange optimal duallösning. Visa att komplementaritetsvillkoren är uppfyllda. (3p)

d) Antag att högerledet i det första duala bivillkoret ökar med en enhet. Förändrar det den primala optimallösningen? (1p)

Uppgift 4

Betrakta problemet i uppgift 3, med ändringen att man bestämt att sats 1 inte ska göras, dvs. x_1 har fixerats till noll. Man bestämmer sig också för att antalet satser ska vara i hela tusental. Genom att dividera högerleden med 1000 fås ett normalt heltalsproblem. Lös problemet med Land-Doig-Dakins trädsökningsmetod. (Tvådimensionella LP-problem får lösas grafiskt.) (3p)

Uppgift 5

Albert och Herbert ska starta en firma som tillverkar cement. Man funderar på vilken blandning av finfördelad kalksten och lera som är bäst. Låt x_1 vara mängden kalksten (i kg) och x_2 mängden lera (i kg) i ett kg cement. Herbert räknar på ett omständligt sätt ut att den optimala blandningen skulle fås av att minimera $f(x) = 3x_1^2 + 2x_2^2 - 6x_1 - 2x_2$.

a) Albert vill att man ska ta med ett bivillkor som säger $x_1 + x_2 \leq 1$. "Ska det inte vara $x_1 + x_2 = 1$?" frågar Herbert, varvid Albert påpekar att det vore en bra affär att sälja mindre än ett kg för samma pris som ett kg. Herbert accepterar (med viss osäkerhet) denna logik, men påpekar att man inte får glömma bivillkoren $x_1 \geq 0$ och $x_2 \geq 0$.

Finn den optimala lösningen till deras problem med Zoutendijks metod. Starta i punkten $x_1 = 1$ och $x_2 = 0$ (dvs. bara kalksten). (Tvådimensionella LP-problem får lösas grafiskt.) Spelar det någon roll om man använder $x_1 + x_2 \leq 1$ eller $x_1 + x_2 = 1$? (3p)

b) Albert och Herbert är överens om att bara lera ($x_1 = 0$ och $x_2 = 1$) inte kan vara en bra lösning, av flera skäl. Verifiera med hjälp av KKT-villkoren att denna lösning inte är optimal. (3p)

c) Illustrera KKT-villkoren i uppgift b grafiskt, genom att rita relevanta gradienter och dra slutsatser av deras inbördes förhållande. (2p)

Uppgift 6

Fyra målare ska måla fyra sidor på ett hus. Målarna har olika erfarenhet och målar med olika hastighet. Nedanstående matris anger hur lång tid det tar för de olika målarna (raderna) att måla de olika sidorna (kolumnerna). Man har bestämt att varje målare ska måla en sida (och alla sidorna ska bli målade en gång) och vill minimera tidsåtgången, dvs. summan av tiderna.

$$C = \begin{pmatrix} 105 & 154 & 104 & 100 \\ 120 & 172 & 124 & 120 \\ 98 & 148 & 100 & 100 \\ 130 & 171 & 134 & 132 \end{pmatrix}$$

a) Finn den bästa tillordningen av målare till hussidor med hjälp av den ungerska metoden. (2p)

b) Målare 2 och 4 är betydligt långsammare än de andra två. Hur kan man se det i lösningen till problemet? (Ledning: Se duallösningen.) Kan man se någon motsvarande skillnad när det gäller hussidorna? (Att bara titta på ursprungliga C ger inga poäng.) (2p)