Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP88/TEN 1
OPTIMERING FÖR INGENJÖRER för M/EMM

Datum:	1 november 2013
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	7
Antal sidor:	6
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs normalt 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Börje och Beata ska göra äppelmos. De har två kg äpplen, och tittar i olika recept. I ett står det att man ska tillsätta 2 dl vatten och 12 dl socker, men i ett annat står det 1 dl vatten och 6 dl socker. Börje och Beata vill använda optimering för att bestämma de bästa mängderna av tillsatserna.

Efter mycket funderande och diskuterande kommer de fram till en olinjär funktion som på ett godtagbart sätt beskriver den smakupplevelse som de vill maximera. De skriver om problemet till ett minimeringsproblem, för de är mer vana vid det.

$$\min f(x) = 2x_1^2 + 2x_1 + 3(x_2 - 10)^2 - 2x_1x_2,$$

där x_1 står för antal dl vatten och x_2 för antal dl socker de tillsätter.

De sätter upp följande begränsningar. Den totala mängden av tillsatt vatten och socker får inte överskrida 6 dl. Mängden vatten inte får vara större än mängden socker men inte mindre än halva mängden socker. Detta ger följande bivillkor: $x_1 + x_2 \leq 6$, $x_1 \leq x_2$, $x_1 \geq 0.5x_2$.

a) Starta i origo och lös problemet med Zoutendijks metod. Tvådimensionella LP-problem får lösas grafiskt. (3p)

b) Det tillåtna området har tre extrempunkter. Rita in de utåtriktade normalerna (gradienterna) till de aktiva bivilkoren i varje extrempunkt. (2p)

c) Antag att målfunktionen är okänd. Gör följande för varje extrempunkt: Ange en målfunktionsgradient som skulle ge ett unikt optimum i den punkten. (Använd gärna enkla siffror, såsom 1, 0 och -1.) Verifiera optimalitet grafiskt. (Ledning: Använd resultatet i uppgift b.) (2p)

Uppgift 2

Betrakta problemet i uppgift 1. Börje och Beata ändrar målfunktionen till en linjär: maximera $2x_1 + 3x_2$. (De gillar både vatten och socker.) Bivillkoren är desamma som i uppgift 1.

a) Lös problemet med simplexmetoden. Ange lösning i klartext. (3p)

b) Hur mycket skulle målfunktionsvärdet ökas om de tillät 1 dl mer tillsats av vatten plus socker? (Ledning: Använd skuggpris.) (1p)

c) Antag att man skulle kunna blanda i lite av en annan vätska. Det först bivillkoret säger nu att summan av alla tre tillsatserna ska vara högst 6 dl. Den nya vätskan ingår inte i något annat bivillkor. Vilken heltalig målfunktionskoefficient måste denna vätska minst ha för att komma med i den optimala lösningen? (1p)

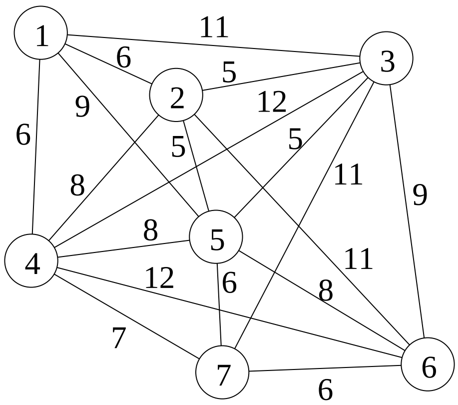
d) Betrakta optimallösningen i uppgift a. För vilka värden på högerledet i första bivillkoret fås samma proportion mellan vatten och socker i optimallösningen? Grafisk motivering räcker. Vad säger detta om modellens giltighet? (2p)

Uppgift 3

Kyrkogårdsarbetare Adam Ask ska inför Allhelgonahelgen titta till alla gravar på begravningsplatsen, så att det är fint när alla anhöriga kommer för att sätta blommor på gravarna. Gravarna ligger lite oregelbundet utspridda, så han vet inte riktigt hur han ska gå. Det är rätt många gravar, så han vill verkligen inte gå onödigt långt. Han kan pricka in varje grav på ett papper, och kan även bedöma hur långt det är mellan dem.

En kväll när han inte har något annat att göra, matar han in alla avstånd på sin mobil, och börjar sedan leta efter en app (ett program) som kan hitta bästa vägen runt. Han vill alltså minimera avståndet han ska gå, och måste besöka varje grav.

Nedan ges ett exempel på en liten del av begravningsplatsen, med gravar som noder och bågarna märkta med avståndet. (Han startar och slutar i nod 1.)



a) Vad ska han söka efter, dvs. vilket (känt) optimeringsproblem är detta? Är det sannolikt att han hittar en app som ger optimal lösning? (Motivera.) (2p)

b) Antag att han inte hittar en lämplig app, och börjar fundera på att hitta en lösning för hand. Föreslå en lämplig heuristik. Använd denna heuristik för att få en tillåten lösning till exemplet ovan. (2p)

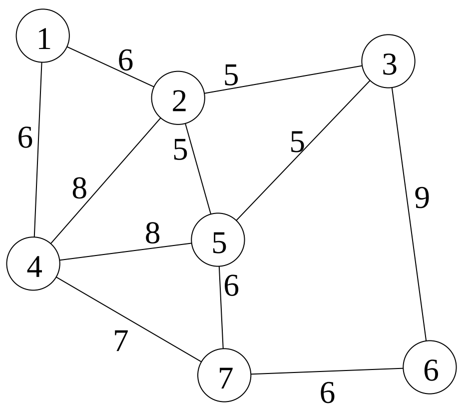
c) Adam funderar på hur bra lösningen han hittade i uppgift b är. Föreslå en relaxation av problemet ovan, och använd den för att få en optimistisk uppskattning att jämföra med. Gör jämförelsen, dvs. ange hur långt ifrån optimum hans lösning är (i värsta fall). (3p)

Uppgift 4

Inför vinterhalkan vill man förbereda den sandning som ska ske när den första halkan sätter in. Nu vill man titta på ett område som bl.a. innehåller alla cykelvägar i Ryd och kring Campus Valla på Linköpings universitet. På dessa gator/vägar räcker det att köra en gång när man sandar, och man kan köra åt vilket håll som helst, dvs. grafen kan anses oriktad.

a) Vilket (känt) optimeringsproblem är det att finna den kortaste rundturen så att alla gator/vägar blir sandade? Finns det en polynomisk optimerande lösningsmetod för detta problem? (1p)

b) Finn en optimal lösning till problemet i nedanstående *mycket* förenklade graf. Finns det någon lösning där man inte behöver köra på någon redan sandad gata/väg? Man vill starta och sluta i nod 1. (3p)



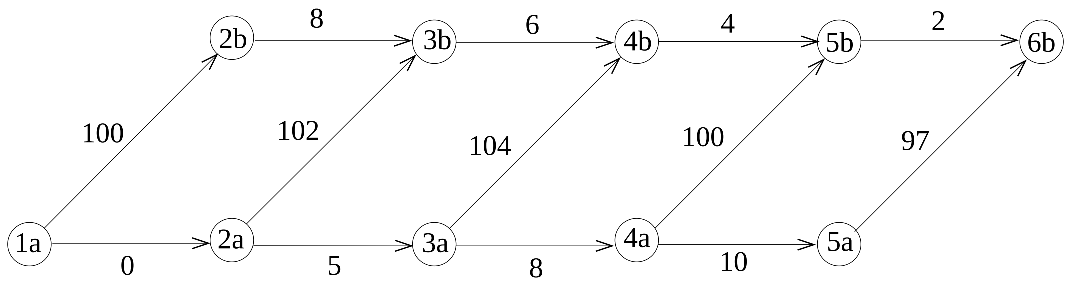
Uppgift 5

Eva Embla har en gammal bil och funderar på när hon ska sätta på dubbdäcken. Hon gör (av princip) det själv, men det är ganska jobbigt, och tar ett par timmar. Hon har bara tid att göra detta på söndagar, så om hon inte byter en viss söndag, får hon köra en vecka till med samma däck.

Hon vill nu gärna hitta ett sätt att finna en optimal lösning till detta problem. För att få olika besvär och risker att bli jämförbara, räknar hon om allt till kostnader, och målet är att minimera de totala kostnaderna. Att byta däcken innebär en viss kostnad som beror på när det sker, eftersom hon har olika mycket att göra på olika söndagar.

Att köra med dubbdäck innebär lite högre bensinkostnader samt en något ökad olycksrisk vid sommarväglag. Att köra med sommardäck innebär högre risk för olyckor vid vinterväglag. Eva har fått tag i en långsiktig väderprognos som hjälper till att bedöma riskerna för vinterväglag. Under en viss period är det olagligt att köra med sommardäck om det skulle vara isigt på gatorna, så har hon inte bytt då, kan hon riskera böter. Eva har nu lyckats beräkna alla kostnader för varje vecka.

a) I följande nätverk har Eva ritat in de möjligheter hon har under november, med ett steg för varje vecka. Den undre nivån (med nodnamn med a) motsvarar sommardäck och den övre (med nodnamn med b) motsvarar vinterdäck. På bågarna står de kostnader Eva har beräknat. Hon börjar (i nod 1a) med sommardäck, och slutar (i nod 6b) med vinterdäck. (Under denna period är det aldrig olagligt att köra med sommardäck, så några böter finns ej med i kostnaderna.)



Ange en lämplig (känd) metod för att finna den bästa lösningen, och använd den för att lösa problemet. Beskriv den bästa lösningen i ord. (3p)

b) Beskriv principiellt hur följande saker kan hanteras genom att förändra grafen. Hon vill planera ett helt år. Hon kan som ett tredje alternativ använda dubbfria vinterdäck. (3p)

Uppgift 6

Apelsons AB äger ett flertal äppelodlingar på olika platser i Sverige. Man ska nu skörda, och funderar på vart man ska skicka äpplena. Det finns flera syltfabriker, saftfabriker och musterier att välja på. Apelsons har gjort en bedömning av hur mycket äpplen man kommer att skörda på de olika odlingarna. Genom diskussion med de olika fabrikerna och musterierna har man enats om vilka mängder som ska levereras till de olika platserna. Den enda frågan som nu återstår är vilka äpplen som ska levereras till vilka platser, dvs. hur äpplena ska skickas. Från en karta på nätet har man läst ut hur långt det är mellan de olika platserna. Man antar att kostnaden för att skicka äpplen på en viss länk är proportionell mot mängden äpplen som skickas. (Den linjära koefficienten beror givetvis på hur lång länken är, men det har beräknats i förväg.) Vi antar för enkelhets skull att alla äpplen är av samma sort. Problemet att hitta det billigaste sättet att skicka efterfrågade mängder äpplen blir då ett linjärt minkostnadsflödesproblem, som kan lösas med simplexteknik.

a) Lös följande mycket förenklade problem, där vi har tre äppelodlingar och två fabriker och äpplena skickas direkt från odling till fabrik med linjära transportkostnader med följande koefficienter, där c_{ij} är kostnaden (per ton) att skicka från odling i till fabrik j.

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 8 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$$

Alla bågar har övre gräns 100 ton. Tillgången är 20, 15 och 7 ton äpplen och de två fabrikerna ska ta emot 21 ton vardera. En möjlig lösning är att skicka 20 ton från odling 1 till fabrik 2, 15 ton från odling 2 till fabrik 1, 6 ton från odling 3 till fabrik 1 och 1 ton från odling 3 till fabrik 2. Starta från denna lösning. (3p)

b) Antag att fabrikernas totala kapacitet är större än tillgången på äpplen. Det kan exemplifieras med att låta fabrikerna i uppgift a kunna ta emot 30 ton vardera. Visa hur man kan omformulera problemet (nätverket) något, så att samma metod kan användas för att bestämma vad som ska skickas och hur, så att totalkostnaden minimeras. (Lös inte.) (1p)

Uppgift 7

Apelsons har ett antal fruktodlingar, och funderar på hur mycket man ska skörda i morgon. Varje fruktodling har ett antal träd, och frågan är hur många träd man ska plocka av i morgon. Att "plocka av" ett träd innebär att man tar ner alla frukter på det trädet. Alternativt tar man inget från det trädet. Annars skulle det bli svårt att hålla redan på vad man gjort och inte gjort. Så frågan är hur många träd på varje odlingsplats man ska plocka av i morgon. De andra får stå orörda några dagar till.

Vi antar att alla träd på en plats är lika och att alla äpplen är av samma sort. Att plocka av ett träd på plats j ger en viss mängd äpplen, a_j, (i kg), och en viss vinst, c_j (i kr). Man kan inte plocka mer än b kg, på grund av begränsad lastkapacitet hos traktorn som tar hand om skörden. Man har bestämt sig för att plocka minst l_j och högst u_j träd på plats j.

a) Formulera problemet att maximera vinsten som ett linjärt heltalsproblem. (1p)

b) Lös följande förenklade exempel med bara två odlingar. $c_1 = 10$, $c_2 = 12$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $b = 20$, $l_1 = 3$, $u_1 = 10$, $l_2 = 3$, $u_2 = 10$. (Målfunktionen är skriven i sorten 100 kr och bivillkoret är skrivet i sorten 100 kg.) Använd Land-Doig-Dakins metod. Tvådimensionella LP-problem får lösas grafiskt. Ange optimal lösning i klartext. (3p)

c) Antag att man inte kräver plockning av hela träd, utan tillåter plockning av delar av träd. Vad blir optimallösningen då? (Resultat från deluppgift b får användas.) Hur mycket mer skulle man tjäna? (1p)