Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP88/TEN 1
OPTIMERING FÖR INGENJÖRER

Datum:	28 maj 2014
Tid:	14.00-19.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	5
Antal sidor:	6
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

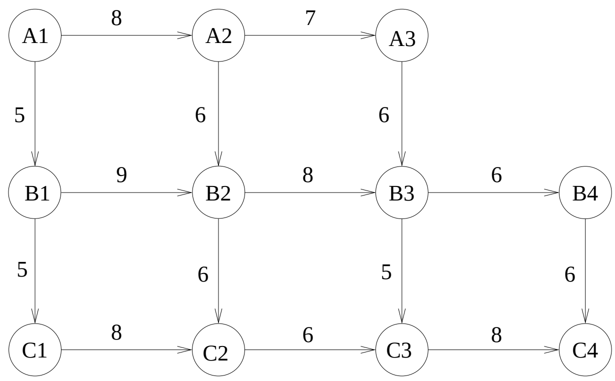
Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Österköpings universitet (ÖsU) ska planera för sitt (vackra) Campus Bella. Nedanstående graf visar salarna och korridorerna i Hus 1.



Till skillnad från Linköpings universitet har ÖsU ingångar till salarna i korsningarna där korridorerna möter varandra. Nod A1 är huvudingången till huset, medan resterande noder representerar ingången till en sal med samma namn som noden. Salarna A2 och A3 rymmer 50 studenter var, och alla C-salarna rymmer 30 studenter. B-korridoren innehåller rum som inte är lärosalar.

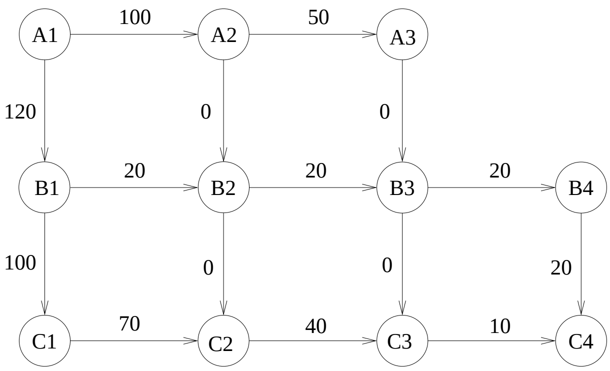
Bågkoefficienterna ska ses som kostnader för att använda bågarna (och baseras på tiden det tar att i normal takt gå mellan ändnoderna samt vissa andra faktorer).

Man tittar nu på situationen kl 8 på morgonen när studenterna strömmar in. Låt oss anta att det blir fullt, dvs. 50 studenter ska till A2, 50 till A3, och 30 ska till varje C-sal. Det betyder att 220 studenter kommer in genom huvudingången i A1. Vi antar att allt sker samtidigt. Eftersom man i denna situation vet i vilken riktning studenterna går, kan bågarna ses som riktade.

a) Man räknar med att varje student tar billigaste vägen från A1 till sin sal. Finn det totala flödet genom att lösa billigaste vägproblem och addera flöden. (Måste man lösa flera eller räcker det med ett?) (2p)

b) Lösningen i uppgift a gör att det blir väldigt trångt i vissa korridorer, vilket gör att de angivna kostnaderna inte stämmer, utan ökas. För att få ett bättre genomflöde funderar man på att begränsa flödet i vissa korridorer. (Hur detta ska ske i praktiken får bli en senare fråga, men vi kan nu se det som en övre gräns för flödet i bågen.)

Om man inför en begränsning på 100 i korridoren mellan B1 och C1, kan en tillåten lösning fås genom att låta 20 studenter använda B-korridoren, se följande graf med bågarna markerade med flöde.



Är denna lösning optimal, eller finns billigare flöde? Svara på frågan genom att använda simplexmetoden för minkostnadsflödesproblem. (Alla bågar utom (B1,C1) har mycket stor övre gräns.) Ange det billigaste flödet. (3p)

c) Man inser att det nog inte går att införa begräsningar så som i uppgift b. Istället vill man modellera de ökande kostnaderna på ett bättre sätt. Man antar istället att den angivna kostnaden gäller upp till flödet 100, men flödet utöver det kostar dubbelt så mycket. Ger detta en konvex eller konkav kostnadsfunktion?

Denna ändring kan åstadkommas genom att förändra nätverket. Gör detta för bågarna (A1,B1) och (B1,C1), genom att rita ändringarna i grafen (tillsammans med bågdata). (2p)

d) Utgå från lösningen i uppgift b (speciellt nodpriserna), och kontrollera om den är optimal i grafen i uppgift c. (1p)

e) Man återvänder till tanken på övre gränser för flödet. Antag att man skulle införa en begränsning på 100 studenter i varje korridor (dvs. en övre gräns på 100 för varje båge).

Man funderar även på att bygga ut sal C4, så att den tar många fler studenter (och kanske kan användas vid konserter etc.). Man undrar då hur många som då kan komma fram från A1 till C4. Finn maxflöde från A1 till C4. (Detta problem är så enkelt att själva vägsökningen inte behöver redovisas i detalj. Minsnitt är dock av intresse.)

Man vill öka maxflödet från A1 till C4 genom att öka den övre gränsen för *två* bågar till 150 vardera. Finn vilka två bågar detta bör göras för (här krävs bra motivering, förslagsvis mha. minsnitt) och finn nytt maxflöde. (Här ska alla steg i metoden redovisas noga.) (3p)

f) Utgå från billigaste vägarna i uppgift a. Att bågen (B2,B3) har så hög kostnad beror på att man har ställt ut bokhyllor i korridoren, så att det blir trängre. (Man ville helst inte ha studenter i den korridoren.) Om man tar bort bokhyllorna minskar bågkostnaden från 8 till 4. Skulle detta ändra den billigaste vägen från A1 till C4? (Använd nodpriser.) (2p)

Uppgift 2

Betrakta nätverket för Hus 1 i uppgift 1, men låt bågarna vara oriktade (som de ju egentligen är).

a) Man ska installera datorer/terminaler vid varje ingång (dvs. i alla noder) och dessa ska vara sammankopplade med optisk fiber. Fibern ska följa korridorerna, och kostnaden är proportionell mot bågkostnaderna som anges i uppgift 1. Finn billigaste sätt att dra fibrerna. Ange vilket optimeringsproblem det är och vilken metod som används. (2p)

b) Vaktmästaren på ÖsU anser att terminalen vid A1 kommer att utnyttjas mer än de andra, och att det vore vettigt att ha två fibrer (som går i olika korridorer) kopplade till den terminalen. Vilket optimeringsproblem blir det då? Finn billigaste lösning. (2p)

c) Datoransvarig på ÖsU anser att *alla* terminaler bör vara inkopplade med två olika fibrer (i olika korridorer), så att de fortfarande fungerar om en går sönder. Problemet att finna den billigaste lösningen borde då vara ett handelsresandeproblem, tror han. Försök finna en bra lösningen med en heuristik (som ingår i kursen). Förklara ev. svårigheter att finna en lösning. Beskriv vilka typer av lösningar man kan få, och vilka optimeringsproblem de är lösningar till. (Ledning: Vad betyder egentligen "återbesök" i detta sammanhang, och är det bra eller dåligt?) (3p)

d) Vilka olikheter finns mellan målfunktionsvärdena i uppgift a, b och c och hur kan de användas i optimeringsmetoder för handelsresandeproblem? (1p)

e) Ungefär mitt på varje korridor finns ett postfack där man kan lämna och hämta internpost. Postavdelningen ska köra runt (med en liten elbil) och hämta/lämna post vid varje postfack. Bilen får inte plats att vända mitt i en korridor (utan bara i korsningar). Man vill givetvis köra så kort sträcka som möjligt, vilket blir en rundtur (som börjar och slutar i A1). Vilket känt optimeringsproblem är detta? Blir man tvungen att köra i några korridorer mer än en gång? Beräkna i så fall vilka korridorer det blir. (3p)

Uppgift 3

På ÖsU har man f.n. tre program, Å-linjen, Ä-linjen och Ö-linjen (de flesta andra bokstäver var upptagna), och man funderar nu på hur många platser man ska ha på de tre programmen i en årskurs (dvs. hur många studenter man ska anta). Man kan inte har fler än totalt 200 studenter i en årskurs, och Å-linjen använder laborationslokaler som gör att man inte kan ha fler än 100 på den linjen. Studenter på Ä-linjen kräver mycket datorresurser, så man sätter taket till 150 studenter på Ä-linjen.

Varje student ger en viss inkomst till ÖsU, och man anser att en Å-student ger inkomsten 4 medan en Ä-student ger inkomsten 3 och en Ö-student ger inkomsten 2. (Detta är siffror som har uppskattats på ett mycket komplicerat sätt.)

a) Lös problemet att finna de antal studenter som maximerar universitets vinst med simplexmetoden. Ange lösningen i klartext, samt vilken vinst man förväntar sig. (3p)

b) Man skulle kunna lägga ner medel på att öka ett av de tre taken (högerleden) i ovanstående problem, genom att skaffa mer utrymme, mer laborationslokaler eller mer datorer. Använd lösningen i uppgift a för att avgöra vilket tak man skulle tjäna mest på att öka (lite). Hur mycket skulle man tjäna per ytterligare student (dvs. per enhets ökning av högerledet)? (1p)

c) I optimallösningen i uppgift a får ett program noll platser. Hur skulle målfunktionsvärdet förändras om man (av princip) tog in en student på det programmet? (1p)

d) Betrakta frågeställningen i uppgift c. Utgå från optimallösningen i uppgift a. Antag att man lyckades förändra inkomsten för en student för programmet som får noll platser i uppgift a så att den reducerade kostnaden för den variabeln blir lika med 1, vilket betyder att det blir lönsamt att öka antalet (den variabeln blir inkommande). Kommer man då att uppnå målet att ha studenter på alla tre program i den bästa lösningen? (Finn svaret metodiskt.) (1p)

e) Utgå från optimallösningen i uppgift a. Man funderar på att starta Z-linjen. Dessa studenter skulle givetvis ingå i bivillkoret på max 200 studenter, och en Z-student kräver lika mycket datorresurser som en Ä-student, men Z-studenter använder inga laborationslokaler. Vilket inkomst per Z-student skulle krävas för att totalinkomsten skulle ökas om denna linje infördes? (Använd reducerad kostnad för att finna svaret.) (1p)

Uppgift 4

Betrakta problemet i uppgift 3. Man bestämmer sig för att lägga ner Ö-linjen, samt att intagningen ska ske i hela 30-personersgrupper (klasser). Detta kan formuleras som ett heltalsproblem genom att utgå från modellen i uppgift 3, och ersätta variablerna som anger antal studenter med variabler som anger antal klasser (30-personersgrupper) och kräva att dessa variabler blir heltal. Om man gör dessa förändringar i målfunktion och bivillkor, visar det sig att man kan dividera bort gemensamma nämnare och avrunda högerleden neråt, vilket ger följande heltalsproblem.

$$
\begin{array}{llrcrcl}
\max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & & \\
\text{då} & & x_1 & + & x_2 & \leq & 6 \\
& & x_1 & & & \leq & 3 \\
& & & & x_2 & \leq & 5 \\
& & x_1 & , & x_2 & \geq & 0 \text{ heltal}
\end{array}
$$

När man löser detta problem med Land-Doig-Dakins metod, visar det sig att det första LP-problemet ger heltalslösning direkt. Tyvärr visar det sig att det tillkommer ett bivillkor för grupprum. Varje klass på Å-linjen delas upp i två mindre grupper, och varje klass på Ä-linjen delas upp i tre mindre grupper, och varje mindre grupp behöver ett grupprum. Det finns bara 14 grupprum, så man måste lägga till bivillkoret $2x_1 + 3x_2 \leq 14$. Lös detta problem med Land-Doig-Dakins metod. Ange optimallösningen i klartext. (3p)

Uppgift 5

Betrakta problemet i uppgift 3, men där man har bestämt sig för att lägga ner Ö-linjen (så man bara har två variabler kvar). Man upptäcker att inkomsterna per student inte kan ses som linjära. Om man tar in för många, och för få söker, kan man få studenter som egentligen inte passar för dessa utbildningar, och som då kommer att kosta mer pga. upprepade omtentor och förseningar, vilket ger fler stundenter på Campus Bella än beräknat. I värsta fall hoppar vissa studenter av utbildningen innan de slutfört den, vilket gör att en stor del av inkomsten faller bort.

Man beräknar därför en ny målfunktion, nu kostnader som ska minimeras, som $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 300x_1 - 400x_2 + x_1x_2$. Som synes är det med denna målfunktion varken bra att ha för få eller för många studenter. F.ö. behålls bivillkoren från uppgift 3.

a) Kontrollera om följande lösningar motsvarar KKT-punkter.

A: 100 studenter på Å-linjen och 100 studenter på Ä-linjen.
B: 50 studenter på Å-linjen och 150 studenter på Ä-linjen.

I detta fall är KKT-villkoren både nödvändiga och tillräckliga för optimalitet. Vilka slutsatser kan man dra om optimalitet hos de föreslagna lösningarna? (3p)

b) Lös problemet med Zoutendijks metod. Starta med lösningen 100 studenter i varje program, vilket man tror är en ganska bra lösning. Ange optimal lösning i klartext. (3p)