Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP88/TEN 1
OPTIMERING FÖR INGENJÖRER

Datum:	21 oktober 2014
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	9
Antal sidor:	6
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Firma Fisk&Fix AB trycker upp och säljer gamla tentor till studenter vid det lokala universitetet. Man har en stor tryckpress och funderar på hur man ska använda den på bästa sätt i två kommande dagar, då två kurser är aktuella. Givetvis vill man använda optimering, så man formulerar en LP-modell med följande variabler: x_1 är den tid (i sorten dygn) som pressen används till att trycka material till kurs 1 och x_2 är tiden pressen används till att trycka upp till kurs 2. Tryckpressen kan gå dygnet runt, men den totala tiden får inte överstiga två dygn.

Om man trycker upp material till kurs 1 i ett dygn går det åt 400 kg papper och 600 häftklamrar, medan tryckning till kurs 2 i ett dygn kräver 500 kg papper och 300 häftklamrar. Man vill inte använda mer än 1000 kg papper och 1200 häftklamrar för de två dygnen. Man bedömer att tryckning av materialet till kurs 1 ett dygn skulle ge en vinst på 7000 kr, medan vinsten for ett dygns tryckning till kurs 2 skulle ge vinsten 8000 kr. Allt detta ger nedanstående LP-modell, där man har förkortat bort en del nollor. (Sorterna är därmed 1000 kr för målfunktionen, dygn för bivillkor 1, 100 kg papper för bivillkor 2 och 100 häftklamrar för bivillkor 3.)

$$
\begin{array}{llrcrcrl}
\max & z = & 7x_1 & + & 8x_2 & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & x_2 & \leq & 2 & \qquad (1) \\
& & 4x_1 & + & 5x_2 & \leq & 10 & \qquad (2) \\
& & 6x_1 & + & 3x_2 & \leq & 12 & \qquad (3) \\
& & x_1, & & x_2 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

a) Lös problemet med simplexmetoden. Ange optimallösning samt vilka resurser som är begränsande. (3p)

b) Valet av utgående variabel är inte unikt i alla steg i lösningen av uppgift a. Lös om uppgiften, men välj det andra alternativet än det du valde i uppgift a då detta inträffar. Kommer man fram till samma lösning? Kommer man fram till samma baslösning? Kan man pivotera sig fram från lösningen i denna uppgift till en optimaltablå som är identisk med den i uppgift a? Försök förklara situationen med grafisk motivering. (3p)

c) Utgå från optimaltablån i uppgift a. Hur mycket skulle det optimala målfunktionsvärdet öka om man hade 1 kg papper mer? Utgå från optimaltablån i uppgift b och besvara samma fråga. Försök förklara eventuella skillnader. (2p)

d) Formulera LP-dualen till problemet ovan. Ange optimal duallösning med hjälp av optimaltablån i uppgift a. Visa att duallösningen är tillåten i dualen, samt att starka dualsatsen är uppfylld. Gäller samma sak för optimaltablån i uppgift b? Varför är svaret inte förvånande? (3p)

Uppgift 2

Fisk&Fix funderar på var man ska placera avloppet i sitt fiskrenseri. Man studerar kartan över rummet, sett uppifrån. Rummet är 4 gånger 4 meter. Avloppet borde sitta mitt under rensningsdisken som står i punkten $x_1 = 3$ och $x_2 = 4$. (Man har valt rummets nedre vänstra hörn som origo, och disken står 3 m till höger och 4 m ovanför det.) Tyvärr finns en golvöverbyggnad som förhindrar det. Man kan bara sätta avloppet i punkter där $x_1 + x_2 \leq 4$, dvs. till vänster om och nedanför rummets diagonal. Man bestämmer sig för att minimera ett viktat avstånd till den önskade punkten, och inser att det är enklare att minimera kvadraten av avståndet, vilket ger följande optimeringsmodell.

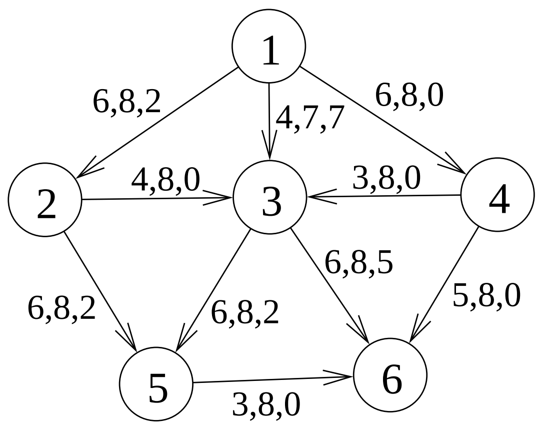
$$
\begin{array}{rl}
\min & f(x) = (x_1 - 3)^2 + 2(x_2 - 4)^2 \\
\text{då} & x_1 + x_2 \leq 4 \\
 & 0 \leq x_1 \leq 4 \\
 & 0 \leq x_2 \leq 4
\end{array}
$$

a) Använd KKT-villkoren för att avgöra om mittpunkten i rummet är den optimala placeringen. Kontrollera även hörnpunkterna $x_1 = 0$ och $x_2 = 4$ samt $x_1 = 4$ och $x_2 = 0$ på samma sätt. Illustrera gärna grafiskt. (3p)

b) Finn en lösning till problemet med Zoutendijks metod. Starta i origo. Illustrera grafiskt. (3p)

Uppgift 3

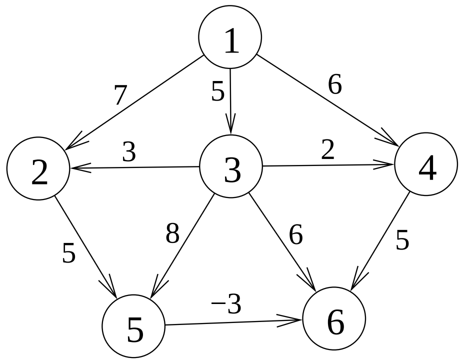
Fisk&Fix ska leverera pallar med fisk från sitt lager i nod 1 i nedanstående nätverk. Man har 9 pallar med fisk i lagret, och 5 av dem ska till en affär i en närbelägen stad i nod 6, och 4 av dem ska till en restaurang i nod 5. Nedanstående nätverk anger möjliga transportvägar. På bågarna anges kostnad per pall, en övre gräns för hur mycket som kan skickas den vägen samt hur mycket man skickade förra gången. Man vill minimera kostnaderna för transporterna.



Frågan man ställer sig är om det är optimalt att skicka som man gjorde förra gången. Använd simplexmetoden för nätverk för att besvara den frågan. Om svaret är nej, starta med den givna lösningen och finn ett ett nytt minkostnadsflöde med simplexteknik. (3p)

Uppgift 4

Följande riktade nätverk med bågkostnader representerar centrum i staden Nixköping. Som synes är alla gator enkelriktade. Bågkoefficienterna anger upplevd kostnad för att vandra sträckan. (Sträckan 5 - 6 är så vacker att den upplevs som belönande att gå på.)

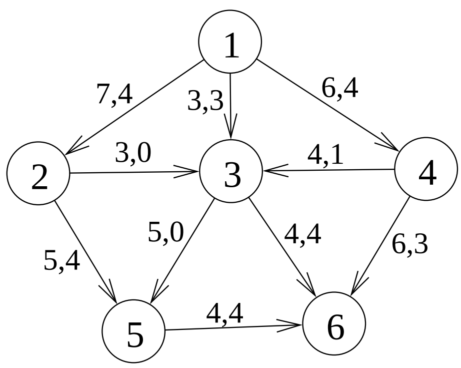


a) Finn billigaste väg från nod 1 till nod 6. Ange metod och motivera metodvalet. (2p)

b) Utgå från lösningen i uppgift a. För vilka värden på kostnaden på båge (3,2) ingår denna båge i den billigaste vägen från nod 1 till nod 6? (Motivera svaret med nodpriser.) (1p)

Uppgift 5

I nedanstående nätverk är bågarna märkta med kapacitet samt flöde. Totalt skickas 11 enheter från nod 1 till nod 6.



Är flödet ett maxflöde från nod 1 till nod 6? Om inte, utgå från det givna flödet och finn maxflöde från nod 1 till nod 6. (Använd lämplig metod, och visa alla steg i metoden tydligt.) Ange minsnitt. (3p)

Uppgift 6

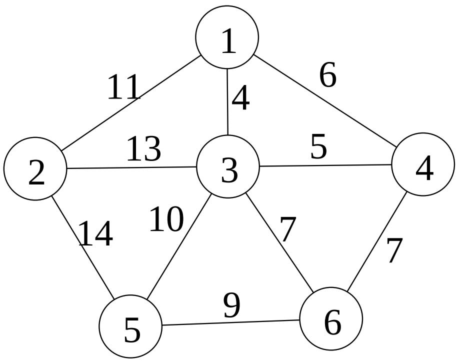
Fisk&Fix funderar på att köpa flera förpackningsmaskiner. Det finns två olika sorter man kan köpa. Maskinsort 1 kräver strömförsörjning i form av ett trefasuttag, medan maskinsort 2 kräver två sådana uttag. Man har nu bara tre stycken, och elnätet i fastigheten klarar inte att installera fler. Maskinsort 1 är 5 m bred, medan maskinsort 2 är 4 m bred, och maskinerna ska stå mot en 10 m lång vägg. Man bedömer att varje maskin av sort 1 skulle ge vinsten 2 miljoner under sin livstid, medan en maskin av sort 2 skulle ge 2.2 miljoner. Man får alltså följande optimeringsmodell.

$$
\begin{array}{llrcrcrl}
\max & z = & 20x_1 & + & 22_2 & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & 2x_2 & \leq & 3 & \\
& & 5x_1 & + & 4x_2 & \leq & 10 & \\
& & x_1, & & x_2 & \geq & 0 & \text{heltal}
\end{array}
$$

Finn en optimallösning med Land-Doig-Dakins trädsökningsmetod. Tvådimensionella LP-problem får lösas grafiskt. (3p)

Uppgift 7

Betrakta följande oriktade nätverk med bågkostnader.



a) Finn en bra handelsresandetur med valfri metod. Beskriv dock metoden. Använd en relaxation av problemet ovan för att få en optimistisk uppskattning att jämföra rundturen med, samt ange hur långt ifrån optimum lösningen är (i värsta fall). (2p)

b) Finn billigaste uppspännade träd i grafen med lämplig metod. (2p)

Uppgift 8

Finn billigaste tillordning för tillordningsproblemet med följande kostnadsmatris.

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 11 & 20 & 21 \\ 2 & 9 & 12 & 19 & 22 \\ 3 & 8 & 13 & 18 & 23 \\ 4 & 7 & 14 & 17 & 24 \\ 5 & 6 & 15 & 16 & 25 \end{pmatrix}$$

Lös problemet med ungerska metoden. Ange optimal lösning samt total tid. Ange även optimal duallösning. (3p)

Uppgift 9

Betrakta nedanstående kappsäcksproblem.

$$\begin{array}{llrcrcrcrcrcc} \max & z = & 7x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 7x_4 & + & 8x_5 & & \\ \text{då} & & 4x_1 & + & 5x_2 & + & 5x_3 & + & 6x_4 & + & 4x_5 & \leq & 13 \\ & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \in & \{0,1\} \end{array}$$

a) Lös LP-relaxationen. Beräkna en övre gräns till det optimala målfunktionsvärdet för heltalsproblemet. Avrunda LP-lösningen och beräkna en undre gräns till heltalsproblemet. (3p)

b) Ange en minimal övertäckning till heltalsproblemet som skär bort LP-lösningen i uppgift a. (1p)