Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP88/TEN 1
OPTIMERING FÖR INGENJÖRER

Datum:	10 januari 2015
Tid:	14.00-19.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	7
Antal sidor:	6
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Firma PrimaProdutti ställer upp följande modell för att bestämma sin produktion nästa år. x_j är antalet ton som produceras av produkt j och de två bivillkoren avser begränsad tillgång av två speficika råvaror. Målfunktionen anger vinst, och ska maximeras. Som synes interagerar de olika produkterna på ett komplicerat sätt, och PrimaProdutti vill bestämma vilken produktion som är den bästa.

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcll}
\max & z = & 2x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & \leq & 3 & (1) \\
 & & 4x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & - & x_4 & \leq & 4 & (2) \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

a) Hjälp PrimaProdutti och lös problemet med simplexmetoden. Starta i origo. Ange optimallösning samt vilka råvaror som är begränsande. (2p)

b) PrimaProduttis ekonomiansvarige Piccola kommer på att målfunktionen anger kostnad, inte vinst som man först trodde. Ändra problemet ovan från max till min. Lös min-problemet med simplexmetoden. Starta i origo. Ange optimallösning samt vilka råvaror som är begränsande. (2p)

c) Formulera LP-dualen till max-problemet ovan. Lös problemet grafiskt. (Ledning: Duallösningen kan även läsas ut ur optimaltablån i uppgift a.) (2p)

d) Formulera LP-dualen till min-problemet ovan. Lös problemet grafiskt. (Ledning: Duallösningen kan även läsas ut ur optimaltablån i uppgift b.) (2p)

e) En ny möjlig produkt har bivillkorskoefficienterna 2 och 1 samt målfunktionskoefficienten 3. Skulle denna produkt förbättra resultatet i uppgift a? (Svara m.h.a. reducerad kostnad.) (1p)

Uppgift 2

Firma Pomodori ska göra en ny sorts sylt, bestående av äpplen och päron. En burk innehåller 2 kg, och man vill inte ha mer äpplen än päron. Efter en omfattande undersökning kommer man fram till att den bästa kombinationen av smak, konsistens och prisvärdhet fås av att minimera en viss funktion, och man får följande optimeringsmodell, där x_1 står för antal kg äpplen i en burk, och x_2 står för antal kg päron i en burk,

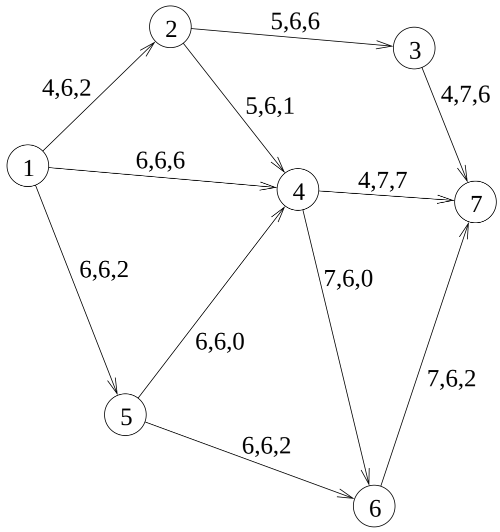
$$
\begin{array}{lll}
\min & f(x) = & 2x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 - 2x_1 - x_2 \\
\text{då} & & x_1 + x_2 \leq 2 \qquad (1) \\
 & & x_1 - x_2 \leq 0 \qquad (2) \\
 & & x_1 \geq 0 \qquad (3)
\end{array}
$$

a) Använd KKT-villkoren för att avgöra om någon av hörnpunkterna i det tillåtna området ger den optimala blandningen. Illustrera grafiskt. (3p)

b) Starta i origo och lös problemet med Zoutendijks metod. (3p)

Uppgift 3

Pomodori anlitar firma Polovolo för att utföra transporterna av sylten. Nedanstående nätverk anger möjliga transportvägar. I nod 7 finns ett behov av 15 pallar sylt, och just nu har man 10 pallar i nod 1 och 5 pallar i nod 2. På bågarna anges kostnad per pall, en övre gräns för hur mycket som kan skickas den vägen samt hur mycket Pomodori skickade förra gången. Man vill minimera kostnaderna för transporterna.



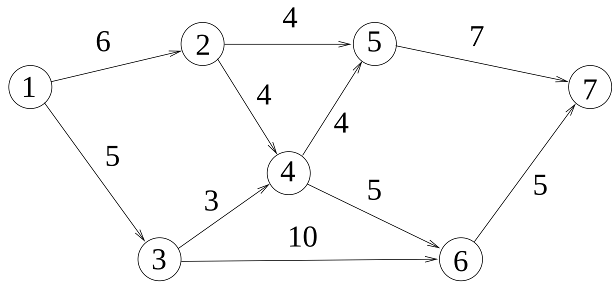
a) Polovolo tycker att det vore bekvämt att göra transporterna på samma sätt som förra gången. Är det optimalt? Använd simplexmetoden för nätverk för att besvara den frågan. (2p)

b) Ett långvarigt vägarbete på båge (5,4) blir färdigt, varvid kostnaden sjunker från 6 till 2. Polovolos planeringsansvarige Pietro tror inte att det ska påverka deras transporter, eftersom båge (4,7) redan är full, och det kan ju inte vara optimalt att skicka från nod 4 till nod 6. Kontrollera huruvida han har rätt. Starta med lösningen i uppgift a och finn ett ett nytt minkostnadsflöde med simplexteknik. (2p)

c) Utgå från det givna flödet i uppgift a och finn maxflöde från nod 1 till nod 7. (Använd lämplig metod, och visa alla steg i metoden tydligt.) Ange minsnitt. (3p)

Uppgift 4

Polovolo skriver kontrakt med PrimaProdutti. Man ska köra dagliga transporter från nod 1 till nod 7 i nedanstående nätverk. På varje båge står tiden det tar att köra den, och man vill minimera den totala tiden. (Tid är pengar.)



Det visar sig att PrimaProdutti också är intresserade av andra transporter.

a) Finn billigaste väg från nod 1 till nod 7. Finn billigaste väg från nod 1 till nod 6. Ange en duallösning som är tillåten och optimal till båda dessa problem, eller förklara varför det inte går. (3p)

b) Finn billigaste väg från nod 1 till nod 7. (Redan gjort.) Finn billigaste väg från nod 2 till nod 7. Ange en duallösning som är tillåten och optimal till båda dessa problem, eller förklara varför det inte går. (2p)

Uppgift 5

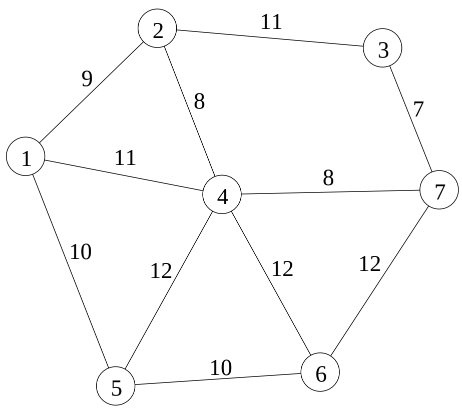
Pomodoris syltmaskiner går sönder, så man måste omedelbart köpa nya. Det finns två olika sorters maskiner på marknaden. En maskin av sort 1 kostar 3 miljoner, och en maskin av sort 2 kostar 5 miljoner. Dessutom producerar en maskin av sort 1 fyra gånger mer än en maskin av sort 2 per tidsenhet. Å andra sidan är maskinsort 1 dyrare att underhålla. En maskin av sort 1 kostar 4000 per år att underhålla, medan en maskin av sort 2 bara kostar 3000. Man bestämmer att inte använda mer än 18 miljoner på inköp, och underhållskostnaden får inte överstiga 14000 per år. Dessutom kan man inte köpa mer än totalt fem maskiner. Man får följande optimeringsmodell för att bestämma inköpen så att produktiviteten maximeras, under de givna begränsningarna.

$$
\begin{array}{llrcrcl}
\max & z = & 4x_1 & + & x_2 & & \\
\text{då} & & 3x_1 & + & 5x_2 & \leq & 18 \\
& & 4x_1 & + & 3x_2 & \leq & 14 \\
& & x_1 & + & x_2 & \leq & 5 \\
& & x_1, & & x_2 & \geq & 0 \quad \text{, heltal}
\end{array}
$$

Finn en optimallösning med Land-Doig-Dakins trädsökningsmetod. Tvådimensionella LP-problem får lösas grafiskt. (3p)

Uppgift 6

Följande oriktade nätverk med bågkostnader representerar gatorna i PrimaCitta, vilket är PrimaProduttis fabriksområde. Bågkoefficienterna anger bågarnas längd.



Nattvakten Piezo ska gå runt och kontrollera att allt är lugnt (fast mest att ingen lampa har glömts på etc.). I varje nod hänger en nyckel som nattvakten ska vrida runt i sin maskin, som då registrerar när han var där. Piezo måste alltså gå en runda som besöker varje nyckel (dvs. nod) en gång. Han får ta dem i vilken ordning han vill (även om ingången är vid nod 1, så han börjar och slutar där), och han behöver inte gå på alla gator. Piezo vill inte gå onödigt långt, så han är intresserad av den kortaste rundturen som uppfyller dessa villkor.

a) Finn en bra rundtur åt Piezo med valfri metod. Beskriv dock metoden. (2p)

b) Piezo undrar om turen som föreslagits är den kortaste. Använd en relaxation av problemet ovan för att få en optimistisk uppskattning att jämföra rundturen med, samt ange hur långt ifrån optimum lösningen är (i värsta fall). (2p)

c) Det visar sig att en kran stod och droppade mitt på en av gatorna som Piezo inte gick på. Därför bestäms att nattvakten måste gå på alla gator (minst en gång), förutom båge (1,4), där det varken finns kranar eller lampor. Finn en rundtur som uppfyller detta krav och som är så kort som möjligt. Ange vilka bågar Piezo går i två gånger och hur många gånger han kommer att besöka varje nod då han går denna tur. (3p)

Uppgift 7

Fem plockare ska skörda tomater från fem olika odlingar. Varje plockare ska ta hand om en odling (och alla odlingar ska skördas). Odlingarna är lite olika, och plockarna har olika erfarenhet, så man vill bestämma den bästa tillordningen av plockare till odlingar. Följande matris anger hur lång tid det skulle ta för varje plockare att skörda varje odling. (Raderna motsvarar plockare och kolumnerna odlingar.)

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 8 & 6 & 8 & 9 \\ 2 & 6 & 5 & 8 & 6 \\ 1 & 4 & 5 & 4 & 5 \end{pmatrix}$$

Man vill finna en lösning som minimerar summan av tiderna. Lös problemet med ungerska metoden. Ange optimal lösning samt total tid. Ange även optimal duallösning. (3p)