Matematiska institutionen
Optimeringslära

# TENTAMEN

## TAOP88/TEN 1
## OPTIMERING FÖR INGENJÖRER

| | |
|---|---|
| **Datum:** | 2 juni 2015 |
| **Tid:** | 8.00-13.00 |
| **Hjälpmedel:** | Miniräknare |
| | Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering* |
| | Anteckningar i boken får förekomma. |
| **Antal uppgifter:** | 7 |
| **Antal sidor:** | 5 |
| | Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad. |
| | Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng. |
| **Examinator:** | Kaj Holmberg |
| **Jourhavande lärare:** | Kaj Holmberg, tel 013-282867 |

**Resultat meddelas per e-post**

## Tentamensinstruktioner

### När Du löser uppgifterna

*Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.*
*Motivera alla påståenden du gör.*
*Använd de standardmetoder som ingår i kursen.*

*Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.*
*Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.*

### Vid skrivningens slut

*Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.*
*Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.*
*Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.*

**Uppgift 1**

Firma Fräser&Klutta ställer upp följande modell för att bestämma sin produktion av isländskt lakritsgodis nästa år. $x_j$ är antalet ton som ska produceras av sort $j$ och de två bivillkoren avser begränsad tillgång av två speficika råvaror, nämligen salmiak och glycyrrhizin. Målfunktionen anger vinst, och ska maximeras. Produktionschef Eirikur tar sig en titt på problemet och förutsäger att man ska tillverka mycket av sort 1 och inget av sort 3.

$$
\begin{array}{llrcrcrcll}
\max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & x_2 & & & \leq & 4 & \quad (1) \\
& & 2x_1 & + & 2x_2 & - & 2x_3 & \leq & 5 & \quad (2) \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

**a**) Hjälp Fräser&Klutta och lös problemet med simplexmetoden. Ange optimallösning samt vilka råvaror som är begränsande. Hade Eirikur rätt? (3p)

**b**) Man funderar på att köpa in lite mer salmiak eller glycyrrhizin. De är ungefär lika dyra per enhet. Vilken ska man välja? (1p)

**c**) En ny möjlig produkt, “salta buggar” (tänkt för studenter som programmerar), kräver en enhet av vardera råvaran och ger vinsten 3 (dvs. har bivillkorskoefficient 1 i båda bivillkoren samt målfunktionskoefficienten 3). Skulle denna produkt förbättra resultatet i uppgift a? (Svara m.h.a. reducerad kostnad.) (1p)

**d**) Antag att Eirikur förbjuder tillverkning av sort 3. Vilken lösning blir då optimal? Hur mycket skulle man förlora av vinsten? (Lös ej om. Utnyttja lösningsgången i uppgift a.) (1p)

**e**) Formulera LP-dualen till problemet ovan. Lös problemet grafiskt. (Ledning: Duallösningen kan även läsas ut ur optimaltablån i uppgift a.) Finn även grafiskt den optimala duallösningen då sort 3 ej får produceras. (4p)

**Uppgift 2**

Betrakta problemet i uppgift 1. Eirikur kräver att sort 3 inte tillverkas och att all tillverkning sker i hela ton. Finn en optimallösning till heltalsproblemet med Land-Doig-Dakins trädsökningsmetod. Tvådimensionella LP-problem får lösas grafiskt. (Tips: Gå ner i $\geq$-grenen först.) (3p)

**Uppgift 3**

Firma F&K funderar mer på sitt nya godis “salta buggar”. Glycyrrhizin (se uppgift 1) har visat sig ha vissa cancerförebyggande egenskaper, men har även negativa egenskaper. T.ex. kan saltbalansen i kroppen påverkas, så man bör inte förtära för mycket salt tillsammans med glycyrrhizin. Därför vill F&K finna de optimala mängderna av glycyrrhizin och salt i sitt nya godis. Efter djupa undersökningar har man kommit fram till att de negativa hälsoeffekterna ges av funktionen $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2 - 3x_1 + 2x_2$, där $x_1$ står för mängden glycyrrhizin och $x_2$ står för mängden salt (i lämpliga sorter). För att vara säker på att man inte får för mycket av de två ingredienserna, lägger man till bivillkoret $x_1 + x_2 \leq 2$. För att det ska få kallas lakrits, krävs $x_1 \geq 0.5$. Dessutom krävs givetvis $x_2 \geq 0$. Optimeringsproblemet är alltså att minimera funktionen ovan, under de angivna bivillkoren.

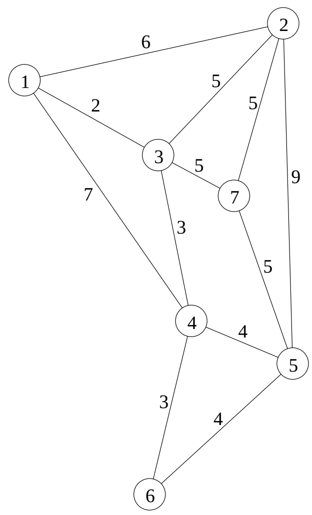
**a**) Använd KKT-villkoren för att avgöra om någon av hörnpunkterna i det tillåtna området ger den optimala lösningen. (3p)

**b**) Rita in eventuella tillåtna förbättringsriktningar i de tre hörnpunkterna i det tillåtna området. (Utnyttja gärna vissa resultat från uppgift a.) (2p)

**c**) Starta i $x_1 = 0.5$ och $x_2 = 0$ och lös problemet med Zoutendijks metod. Gör godiset skäl för namnet? (3p)

## Uppgift 4

Hasse Springschas ska leverera varor (bl.a. salta buggar) till kioskerna vid Varamobadet (av misstag kallat "Sveriges största havsbad" i en turistbroschyr). Nedanstående graf visar kioskerna (representerade av noder) och bågarna visar möjliga vägar att färdas mellan dem. På bågarna står tiden det tar att gå sträckan.

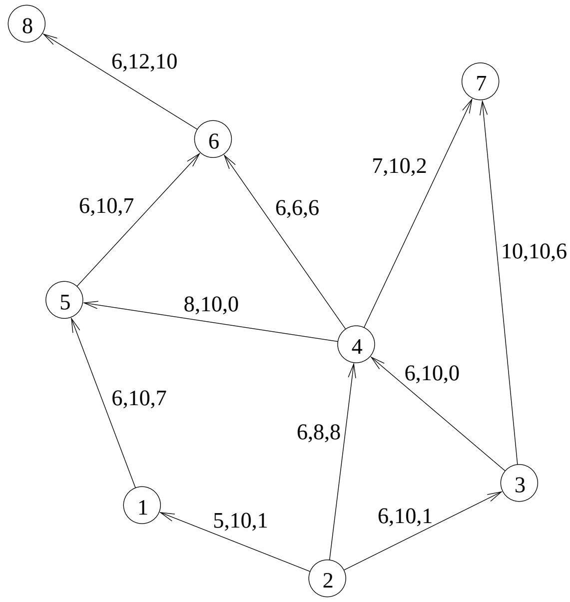



**a**) Hasse vill finna den snabbaste rundturen som passerar alla kioskerna (så att han får mer tid att bada). Vad är det för optimeringsproblem? Finn en bra rundtur åt Hasse med valfri metod. Beskriv dock metoden. Hasse funderar på hur bra rundturen i uppgift a är. Använd en relaxation av problemet för att få en optimistisk uppskattning att jämföra rundturen med, samt ange hur långt ifrån optimum lösningen är (i värsta fall). (3p)

**b**) När Hasse kommer till platsen för första gången, visar det sig att vissa stigar hur vuxit igen. Eftersom stigarna ska användas av badgäster, måste de röjas. Hasse får uppgiften att röja alla stigar. Röjningstiden blir proportionell mot bågkoefficienterna i grafen (men multiplicerad med 10). Finn en rundtur som är så kort som möjligt. Ange speciellt vilka bågar Hasse går i två gånger och hur många gånger han kommer att besöka varje nod då han går denna tur. (3p)

### Uppgift 5

Lakritsrot odlas på vissa ställen i södra Europa och transporteras till fabriker där godis tillverkas. Nedanstående nätverk ger de möjliga transportvägarna. På vissa länkar går transporterna med lastbil, på andra med båt (bl.a. de till Island). Vid ett visst tillfälle finns 6 ton i nod 1 (Frankrike), 10 ton i nod 2 (Italien) och 5 ton i nod 3 (Rumänien), och efterfrågade mängder är 3 ton i nod 6 (Norge), 8 ton i nod 7 (Finland) samt 10 ton i nod 8 (Island). På bågarna står först transportkostnad per ton, sedan övre gräns för hur många ton som kan skickas den vägen och sist den transporterade mängden i ett förslag från konsultfirman BestOpt, där man påstår sig minimera kostnaderna för transporterna.



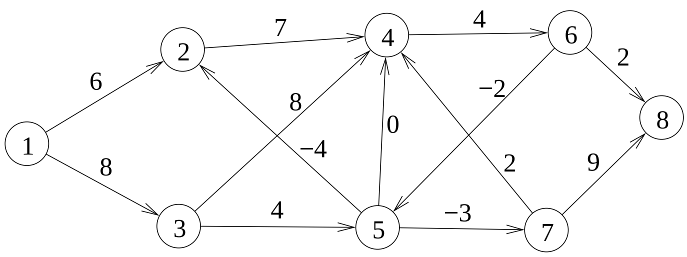

**a**) Är den lösning som BestOpt föreslagit verkligen den billigaste? Använd simplexmetoden för nätverk för att besvara den frågan. (2p)

**b**) Som av en händelse erbjuder sig tågföretaget TransOpt (dotterbolag till BestOpt) att frakta valfri mängd från nod 4 till nod 5 helt gratis. Det är ett öppningserbjudande, och man hoppas konkurrera ut den firma som nu sköter transporterna från nod 4 till nod 6. Med andra ord hoppas man att det som nu går i båge (4,6) helt eller delvis istället ska gå via båge (4,5). Kommer detta erbjudande att ändra det optimala flödet? Starta med lösningen i uppgift a och finn ett ett nytt minkostnadsflöde med simplexteknik. Lyckas TransOpt med sitt uppsåt? (2p)

**c**) Finn maxflöde från nod 2 till nod 8. Starta med flödet noll och gör alla steg i metoden tydligt. Ange minsnitt. (3p)

## Uppgift 6

Gårdfarihandlaren Gusten ska köra från nod 1 till nod 8, och på vägen kan han stanna och sälja saker. Det kostar att köra en sträcka, men han får även inkomster från försäljningen. Han har bedömt nettokostnad för varje möjlig länk, och de anges i nätverket. (Negativa kostnader betyder vinst.) Han åker hur han vill, och det finns ingen länk han måste använda.




**a**) Vilken väg ska han åka, om han vill minimera kostnaden (vilket är samma sak som att maximera vinsten)? Använd passande metod. (2p)

**b**) Gusten är osäker på kostnaden på båge (5,4), $c_{54}$. Ange för samtliga värden på $c_{54}$ om bågen ingår i billigaste vägen eller inte, samt om det finns en billigaste väg. (Svaret ges lämpligtvis i form av intervall.) (2p)

## Uppgift 7

Fyra tandläkare ska laga tänderna på fyra studenter (som har ätit för mycket godis). Tandläkarna har olika kompetens, och studenterna har olika hål i tänderna. Man har uppskattat tidsåtgången för varje tandläkare att behandla varje student, se följande matris, där rader motsvarar tandläkare och kolumner studenter. Tandläkarna bestämmer sig tillsammans för att fördela studenterna så att summan av tiderna minimeras. Varje tandläkare ska ta hand om en student, och varje student ska få tänderna lagade (en gång).

$$C = \begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 5 \\ 12 & 8 & 9 & 5 \\ 11 & 8 & 10 & 6 \\ 13 & 9 & 9 & 5 \end{pmatrix}$$

Lös problemet med ungerska metoden. Ange optimal lösning samt total tid. (2p)