Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP88/TEN 1
OPTIMERING FÖR INGENJÖRER

Datum:	1 juni 2016
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	8
Antal sidor:	6
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Studenten Carolina Rediviva ska flytta från en liten lägenhet i Uppsala till en något större. Hon har ingen bil, utan måste flytta alla saker med sin cykel. (Hon lastar på cykeln och går bredvid och leder den.) Cykeln är inte i bästa skick, så hon kan inte ta mer än 50 kg per gång. Nedan återfinnes en lista över saker hon ska flytta, och hon vill givetvis gå så få gånger som möjligt.

Sak		Vikt (kg)
1	Dator	4
2	Bokhylla (utan böcker)	10
3	Byrå	15
4	TV	5
5	Flyttkartong 1	25
6	Flyttkartong 2	35
7	Flyttkartong 3	30
8	Säng	17
9	Bord	15
10	Stol 1	8
11	Stol 2	8

Vilket känt optimeringsproblem är detta? Finn en bra lösning med en känd heuristik. Beskriv metoden. Finn en optimistisk uppskattning av det optimala målfunktionsvärdet och ange hur långt ifrån optimum lösningen som sämst är. (I detta sammanhang betyder "känd" att den ingår i kursen och finns i kursboken.) (2p)

Uppgift 2

Bokhyllan går sönder i flytten, så Carolina måste köpa ny. Hon kan köpa en eller flera av två olika modeller, vilka anges nedan med pris och kapacitet (i antal böcker).

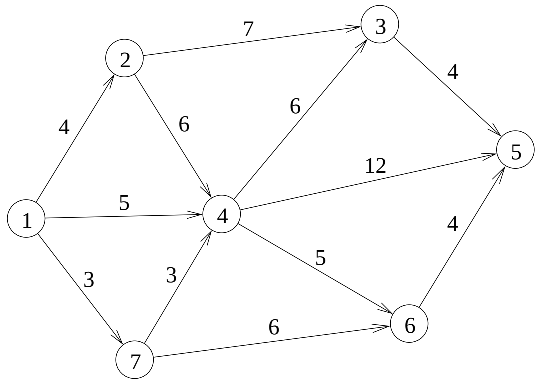
Bokhylla	Pris	Kapacitet
Bully	1000	20
Polly	3000	30

Carolina vill maximera antal böcker som får plats, men hon får inte plats med mer än fyra hyllor. Dessutom får totalpriset inte överstiga 7000.

Formulera problemet som ett linjärt heltalsproblem, och lös problemet med Land-Doig-Dakins trädsökningsmetod. Tvådimensionella LP-problem får lösas grafiskt. Ange lösning och målfunktionsvärde. (3p)

Uppgift 3

När det är dags för flytten börjar Carolina fundera på vilken väg hon ska ta. Hennes gamla lägenhet ligger i nod 1 i nedanstående graf och den nya ligger i nod 5. På bågarna står avståndet, och hon vill ta den kortaste vägen.



Finn kortaste väg med lämplig metod. (2p)

Uppgift 4

Innan hon flyttar in vill Carolina måla om väggarna i den nya lägenheten. Hon har vitt som basfärg, men funderar på att blanda in lite rött och lite gult. Låt x_1 stå för mängden rött och x_2 stå för mängden gult som blandas i. Hon har (med stor svårighet) uppskattat den visuella effekten av dessa variabler som $f(x) = 2x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 8x_1 - 5x_2$ (låga värden är bra). Bivillkor är att mängden rött plus gult inte får överstiga 2 ($x_1 + x_2 \leq 2$) samt givetvis $x_1 \geq 0$ och $x_2 \geq 0$.

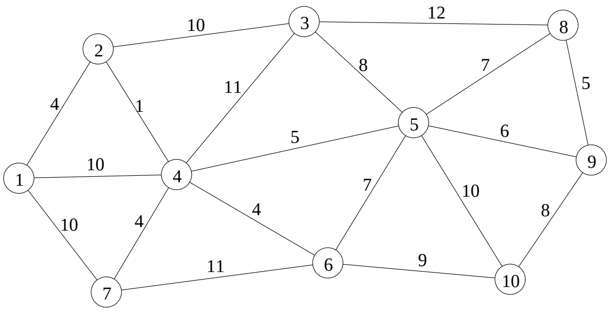
a) Använd KKT-villkoren för att avgöra om någon av punkterna A: (1, 1), B: (2, 0), C: (0, 2) och D: (2, 2) ger den optimala lösningen. (3p)

b) Rita in eventuella tillåtna förbättringsriktningar i punkterna i uppgift a. (Utnyttja resultat från uppgift a.) (1p)

c) Starta i $x_1 = 0$ och $x_2 = 0$ och lös problemet med Zoutendijks metod. (3p)

Uppgift 5

a) Carolina planerar att ha en liten fest i sin nya lägenhet, och ska cykla runt och dela ut inbjudningskort. Vännerna hon ska bjuda in bor i noderna i följande graf (i nod 5 bor hon själv), och hon vill personligen lämna inbjudningskorten till dem. På bågarna står tiden det tar att cykla sträckan. Hon vill helst göra rundturen på så kort tid som möjligt.



Uppgiften är alltså att finna en kortaste rundtur som besöker varje nod en gång. Vilket känt optimeringsproblem är detta? Finn en tillåten lösning med en heuristik. Beskriv heuristiken. Använd därefter en bra relaxation av problemet för att få en undre gräns till det optimala målfunktionsvärdet. Ange hur långt ifrån optimum den ovan funna lösningen som sämst är. (3p)

b) Carolina jobbar extra när studierna tillåter. Dagen innan festen blir det blixthalka och man måste omedelbart sanda gatorna. Carolinas uppgift blir att sanda alla de gator som ingår i grafen ovan. Traktorn hon ska använda för sandningen står i nod 7, men ska lämnas i nod 10. Hon vill minimera körd sträcka, och det visar sig att traktorn håller ungefär samma fart som en cykel, så bågkoefficienterna ovan kan användas. Vad är det för optimeringsproblem? Vilka bågar (om några) måste hon köra två gånger i den optimala turen? (Ledning: För att överföra problemet till standardform kan man införa en fiktiv båge mellan nod 7 och nod 10.) (2p)

Uppgift 6

Carolina ska göra fruktsallad till festen, och möjliga ingredienser är äpple, päron, apelsiner och bananer. Hon gör en subjektiv sammanställning av hur mycket de olika frukterna bidrar till den goda smaken, och vill välja kvantiteter så att detta mått maximeras.

Hon vill dock inte att halten av snabba kolhydrater blir för stor, för då kan vissa gäster bli trötta och gnälliga när blodsockerhalten sjunker efter den initiala toppen. Hon gör en uppskattning av hur mycket de olika frukterna bidrar till denna effekt och konstruerar ett bivillkor som ska kontrollera detta. Hon vill dessutom hålla den totala kostnaden nere, så hon konstruerar ett bivillkor med hjälp av kostnaderna för varje frukt.

Hon får på detta sätt följande linjära optimeringsmodell, där x_1 står för antal äpplen, x_2 för antal päron, x_3 för antal apelsiner och x_4 för antal bananer hon tar med. Bivillkor 1 står för kolhydrater och bivillkor 2 står för kostnad.

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcll}
\max & z = & 3x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & + & 2x_4 & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & + & 5x_4 & \leq & 6 & (1) \\
 & & x_1 & + & 3x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & \leq & 8 & (2) \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

a) Hur blir den optimala fruktmixen? Lös LP-problemet med simplexmetoden. Ange optimallösning. Vilka bivillkor blir aktiva? (3p)

b) Skulle en liten ökning av den tillåtna halten av snabba kolhydrater förbättra smaken? Skulle en liten ökning av budgeten förbättra smaken? Antag att man får välja att öka högerledet med en enhet i ett av bivillkoren. Vilket ska man då välja, och varför? (1p)

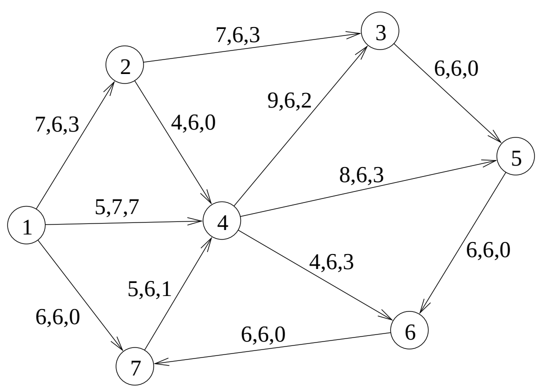
c) Carolina hittar färska persikor i affären. En persika ger målfunktionskoefficient 5, ger koefficient 2 i kolhydratsbivillkoret och kostar 3. Skulle lösningen bli bättre genom att ta med några persikor? (Lös ej om problemet.) (1p)

d) Carolina blir något fundersam av antalet frukter i optimallösningen. Varför blir det inte fler? Skulle en förändring av koefficienterna i målfunktion eller bivillkor kunna ge fler? (2p)

e) Formulera LP-dualen till LP-problemet ovan. Visa att duallösningen i uppgift a är tillåten och att komplementaritetsvillkoren är uppfyllda. (2p)

Uppgift 7

Carolinas bror, Carolus Rex, arbetar med järnvägstransporter. En uppgift är att förflytta tomvagnar från platserna där de står för tillfället till de platser där de behövs. I följande nätverk finns just nu 10 vagnar i nod 1 och en vagn i nod 7, och man har behov av 5 vagnar i nod 3, 3 vagnar i nod 5 och 3 vagnar i nod 6. Nätverket anger de möjliga transportvägarna. På bågarna står först transportkostnad per vagn, därefter övre gräns för hur många vagnar som kan skickas den vägen och sist ett förslag på hur man kan skicka varorna. Kostnaderna antas vara linjära.



a) Är det optimalt att skicka enligt förslaget om man vill minimera transportkostnaderna? Använd simplexmetoden för nätverk för att besvara den frågan. (2p)

b) Man har gjort ett misstag med bågen som går från nod 6 till nod 7. Den ska gå i motsatt riktning, från nod 7 till nod 6, med samma data som nu. Kommer detta att ändra det optimala flödet? Starta med den angivna lösningen i uppgift a och finn ett minkostnadsflöde med simplexmetoden för nätverk. (2p)

c) Det visar sig att man kan få en vagn flyttad från nod 3 till nod 5 utan kostnad. Skulle detta sänka den optimala totalkostnaden? (Ledning: Finn svaret med hjälp av nodpriser.) (1p)

d) Betrakta grafen ovan, men strunta i kostnader och flöde. Man vill veta hur många tomvagnar man maximalt kan skicka från nod 2 till nod 7, och vilka bågar som begränsar flödet. Starta med flödet noll och gör alla steg i metoden tydligt. Ange minsnitt. (3p)

Uppgift 8

Carolina tänker be fyra kompisar att ta med olika maträtter till festen, nämligen bröd, en grönsallad, en pastasallad och en vegetarisk gryta. Kompisarna är olika duktiga på att tillreda dessa rätter och Carolina gör en uppskattning av hur lång tid det skulle ta för varje kompis att göra varje maträtt, se följande matris, där rader motsvarar kompisar och kolumner maträtter. Hon vill fördela arbetet så att den totala tiden blir så liten som möjligt. Varje kompis ska göra en maträtt och varje maträtt ska göras en gång.

$$C = \begin{pmatrix} 11 & 5 & 7 & 10 \\ 11 & 6 & 9 & 12 \\ 12 & 5 & 10 & 17 \\ 10 & 4 & 11 & 16 \end{pmatrix}$$

a) Lös problemet med ungerska metoden. Ange optimal lösning samt total tid. Ange även dual optimallösning och kontrollera starka dualsatsen. (3p)

b) Carolina inser att ingen av kompisarna tänker baka brödet, som hon trodde, utan de skulle bara gå till affären och köpa det. Det betyder att koefficienterna för brödet (kolumn 1) kommer att minskas med 7 för varje person (rad). Kommer den primala och/eller duala lösningen att ändras, och i så fall hur? (Lös inte om problemet.) (1p)