Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP88/TEN 1
OPTIMERING FÖR INGENJÖRER

Datum:	7 januari 2017
Tid:	14.00-19.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	6
Antal sidor:	5
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Företaget Sitt AB har formulerat följande LP-problem för att bestämma en bra produktmix av tre olika sorters kontorsstolar. Tillgången av delar (ryggstöd, armstöd, ben, hjul mm) begränsar tillverkningen. Man vill maximera vinsten.

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\max & z = & 3x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & & & \\
\text{då} & & & & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 7 & (1) \\
& & x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & \leq & 4 & (2) \\
& & 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 12 & (3) \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

a) Lös LP-problemet med simplexmetoden. Ange optimallösning och total vinst. Vilka bivillkor blir aktiva? (3p)

b) Formulera LP-dualen till LP-problemet ovan. Ange optimal duallösning mha. optimaltablån i uppgift a. Kontrollera att den duala lösningen är tillåten, samt att komplementaritetsvillkoren är uppfyllda. (3p)

c) Antag att man kan få en enhet mer av en av de tre delarna. Vilken ska man välja så att förbättringen blir så stor som möjligt? (1p)

d) Antag att vinsten för stolsort 2 ändras. För vilka värden på vinsten fås en annan optimallösning än den som erhölls i uppgift a? (1p)

e) Hur stor behöver förtjänsten för en stol som kräver en av varje del vara för att den stolen ska vara lönsam? (1p)

Uppgift 2

Fem studenter ska göra fem delar i en rapport. Varje del ska göras en gång och varje student ska göra en del. Man har uppskattat tiden det skulle ta för varje student att göra varje del på ett felfritt sätt, och detta ges i matrisen nedan, där rader motsvarar studenter och kolumner uppgifter. Man vill fördela uppgifterna så att den totala arbetstiden minimeras.

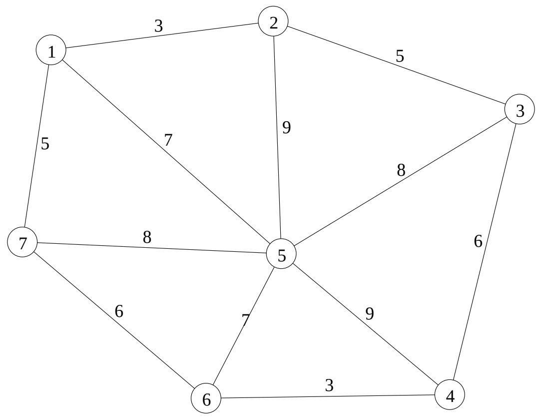
$$
C = \begin{pmatrix}
10 & 15 & 8 & 16 & 13 \\
12 & 16 & 10 & 17 & 13 \\
12 & 17 & 8 & 20 & 12 \\
10 & 17 & 9 & 19 & 13 \\
11 & 16 & 10 & 18 & 12
\end{pmatrix}
$$

a) Lös problemet med ungerska metoden. Ange optimal lösning samt målfunktionsvärde. Ange även dual optimallösning och kontrollera starka dualsatsen. (3p)

b) En student kommer på att variationen mellan uppgifterna (kolumnerna) är större än mellan studenterna (raderna), och tycker därför att man borde börja med kolumnerna istället för raderna i ungerska metoden. Gör så och avgör om det går snabbare att lösa problemet på det sättet. Diskutera lite varför/varför inte man kan förvänta sig någon skillnad, och vilken skillnad det ger för dualvariablernas värden. (2p)

Uppgift 3

a) Blixthalka har slagit till under natten, och Björnulf ska sanda gatorna som ges i nedanstående graf. Hans kompis Elvis har redan sandat sträckan (3,4). Koefficienterna på bågarna anger avstånd, och Björnulf vill köra så kort sträcka som möjligt. Han startar och slutar turen i nod 1.

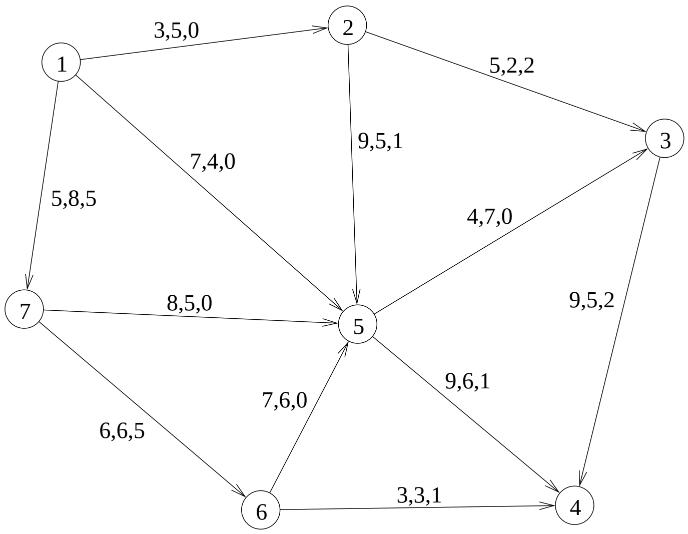


Vilket känt optimeringsproblem är detta? Finn en optimal lösning med lämplig metod. Ange vilka bågar som Björnulf får köra två gånger på, samt en optimal rundtur. Är lösningen unik? (3p)

b) Man förvarar sand i lådor vid varje nod i grafen, och Bjarne får i uppdrag att kontrollera att det tillräckligt mycket sand kvar i alla lådorna. Han vill nu finna kortaste rundturen som besöker varje nod. Vilket känt optimeringsproblem är detta? Finn en tillåten lösning med valfri heuristik. Finn även en optimistisk uppskattning av det optimala målfunktionsvärdet och ange hur långt ifrån optimum den erhållna lösning kan vara. (3p)

Uppgift 4

Pettsons Gårdsmejeri har lager i noderna 1 och 2 i grafen nedan, och har fått beställningar från butikerna i noderna 4 och 6. Man har 5 backar julmust i nod 1 och 3 st i nod 2, och har beställningar på 4 st i nod 6 och 4 st i nod 4. Pettsons praktikant Findus får transportera backarna en och en, så kostnaderna för transporterna upplevs som linjära. På bågarna i grafen står först avståndet, sedan hur många backar man maximalt kan förflytta den vägen, och sist Pettsons förslag på hur Findus bör göra transporterna. Kostnaden blir alltså avståndet gånger antalet backar som går den vägen.



a) Kontrollera om Pettsons förslag ger minsta kostnaden (mha. simplexmetoden för nätverk). (2p)

b) Pettson har gjort ett misstag. Avståndskoefficienten på båge (1,5) ska vara 4, inte 7. Finn optimallösning med simplexmetoden för nätverk. Starta med Pettsons förslag. (2p)

c) Findus hittar en ny väg från nod 3 till nod 7. Hur lång får den vara om det ska vara lönsamt att använda den? (1p)

d) Pettson funderar på att bara ha nod 1 som lager. Butiken i nod 4 har uppvisat stor efterfrågan, så han undrar hur mycket man maximalt kan skicka från nod 1 till nod 4. Efter vissa funderingar ser han möjligheter att skicka 6 backar vägen 1-7-6-5-4 och 5 backar vägen 1-2-5-3-4. Är detta maximalt? Starta med denna lösning och finn maxflöde och minsnitt. Gör alla steg i metoden tydligt. (3p)

e) Om Pettson har sitt lager i nod 1, vill han för varje annnan nod veta hur lång tid det tar att köra dit en back. Ta fram dessa uppgifter med en lämplig optimeringsmetod. (2p)

Uppgift 5

Pettson bestämmer sig för att ha lager i både nod 1 och 2 (se uppgift 6). Han ska få en större sändning julmust och funderar på hur många backar som kan lagras i varje nod. Han vill maximera antal backar i lager, men har vissa begränsningar pga utrymme mm. Om x_j är antal backar som kan få plats i nod j, ges begränsningarna av $2x_1 + 3x_2 \leq 20$, $x_1 \leq 8$ och $x_2 \leq 8$. Pga. placeringen av noderna, värdesätter han denna plats mer, och vill därför maximera $3x_1 + 2x_2$.

Lös detta linjära heltalsproblem med Land-Doig-Dakins trädsökningsmetod. Två-dimensionella LP-problem får lösas grafiskt. Ange lösning och målfunktionsvärde. (3p)

Uppgift 6

Bill och Bell ska bygga hus. De har hittat en plats där man helst vill placera huset, men det finns vissa hinder. Önskeplatsen med den perfekta utsikten motsvarar koordinaterna $x_1 = 2$ och $x_2 = 2$, men detta hindras av en klippbrant med rasrisk som gör att huset måste stå på en plats där $x_1 + x_2 \leq 2$.

Andra begränsningar ger $x_1 \geq 0$ och $x_2 \geq 0$. De vill hitta den tillåtna plats som ligger så nära önskeplatsen som möjligt.

a) Bill tittar på sin karta och anser att punkten $x_1 = 1$ och $x_2 = 1$ ligger närmast. Bell påpekar att detta motsvarar att minimera det Euklidiska avståndet till punkten (2,2), dvs. att det är optimallösningen till problemet att minimera $f(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 2)^2$ under ovanstående bivillkor. Visa att detta stämmer mha. KKT-villkoren. (1p)

b) Bell tycker dock att x_2-koordinaten är viktigare pga. lutningen hos marken, och förespråkar därför målfunktionen att minimera $f(x) = (x_1 - 2)^2 + 2(x_2 - 2)^2$. Även denna målfunktion skulle leda till önskepunkten (2,2) om inga bivillkor fanns. Använd Zoutendijks metod för att ta reda på vilken punkt detta skulle leda till om bivillkoren beaktas. Starta i punkten (0,0). (3p)

c) Bill vill att optimum ska hamna i punkten (1,1) även om målfunktionen i uppgift b används. Detta kan kanske uppnås genom att lägga till bivillkoret $x_1 \leq 1$ eller $x_2 \leq 1$. Bell går med på att högst ett bivillkor läggs till. Hjälp därför Bill att avgöra om något av bivillkoren ger önskad effekt, genom att undersöka möjligheterna med KKT-villkoren. (3p)