Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP88/TEN 1
OPTIMERING FÖR INGENJÖRER

Datum:	3 juni 2017
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	7
Antal sidor:	6
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Företaget Müsli Pigg ska designa en ny blandning som passar att ha på yoghurt eller filmjölk till frukost. Man vill optimera blandningen och har tagit fram en optimeringsmodell enligt vissa antaganden. Tillgängliga råvaror är vetekli (x_1), havrekli (x_2), rågflingor (x_3), russin(x_4) och gojibär (x_5). Samtliga dessa variabler anger hur många gram av råvaran man ska ha i 100 gram färdig produkt.

Som bivillkor har man givetvis att den totala vikten ska vara högst 100 gram. Bivillkoret tillåter mindre än 100, om man skulle ha för restriktiva krav på något annat.

En viss blandning har några intressanta egenskaper, nämligen hur mycket socker, fibrer och fungicider (bekämpningsmedel) den innehåller. Mängden socker ges av $v_1 = 5x_4 + 3x_5$, mängden fibrer av $v_2 = 4x_1 + 3x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5$, och mängden fungicider av $v_3 = 2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 4x_5$.

Det optimeringsproblem M Pigg vill lösa är att maximera mängden fibrer, v_2, då mängden socker inte överstiger 20 (dvs. $v_1 \leq 20$), och mängden fungicider inte överstiger 120 (dvs. $v_3 \leq 120$). Problemet blir

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcrcrr}
\max & z = & 4x_1 & + & 3x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & + & x_5 & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & \leq & 100 & (1) \\
& & & & & & & & 5x_4 & + & 3x_5 & \leq & 20 & (2) \\
& & 2x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & 3x_4 & + & 4x_5 & \leq & 120 & (3) \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4, & & x_5 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

a) Lös LP-problemet med simplexmetoden. Ange optimallösning och total mängd fibrer. Vilka bivillkor blir aktiva? Gör en egen smakbedömning av resultatet. (3p)

b) Finns det någon optimallösning som innehåller både havrekli och rågflingor? Motivera. (1p)

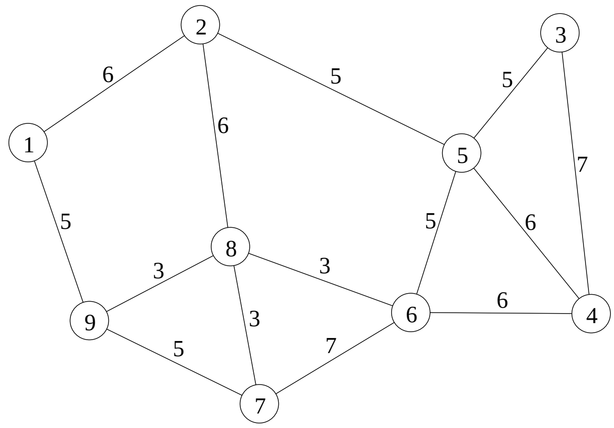
c) Formulera LP-dualen till LP-problemet ovan. Ange optimal duallösning mha. optimaltablån i uppgift a. Kontrollera att den duala lösningen är tillåten, samt att komplementaritetsvillkoren är uppfyllda. (3p)

d) Hur mycket mer fibrer skulle man få om man tillät en enhet mer socker? Hur mycket mer fibrer skulle man få om man tillät en enhet mer fungicider? (1p)

e) Man funderar på att lägga till puffat ris i blandningen. Mängden socker i ett gram puffat ris är 1, mängden fibrer 2 och mängden fungicider 1. Skulle lösningen förbättras av puffat ris? (1p)

Uppgift 2

a) Bosses Buss ska köra pensionärer till Ullared för en hel dags shopping. Bussen står i nod 1 i följande graf, och noderna 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 och 9 representerar busshållplatser där Bosse ska hämta pensionärer. När han har hämtat alla, ska han åka tillbaka till nod 1, där man kör upp på motorvägen. Bågkoefficienterna i grafen anger hur lång tid respektive sträcka tar att köra med buss. Bosse får själv bestämma hur han ska köra bussen mellan hållplatserna. Hur ska han köra för den totala tiden ska minimeras?



Vilket känt optimeringsproblem är detta? Finn en tillåten lösning med valfri heuristik. Beskriv heuristiken. Finn även en optimistisk uppskattning av det optimala målfunktionsvärdet och ange hur långt ifrån optimum den erhållna lösning kan vara. (3p)

b) Efteråt upptäckte Bosse att han hade tappat reservhjulet som satt bakpå bussen. Det måste ha skett under rundturen när han hämtade pensionärer. Därför måste Bosse åka runt och leta efter reservhjulet. Han kommer inte ihåg hur han körde, så han måste leta på alla vägarna i området (alla bågarna i grafen). Man ju ha tur och hitta hjulet direkt, men Bosse räknar inte med att ha tur. Istället bestämmer han sig för att planera baserat på värsta fallet, vilket betyder att han räknar med att få genomsöka alla vägar, och vill minimera tiden det tar. Han startar och slutar i nod 1. Hur ska han köra?

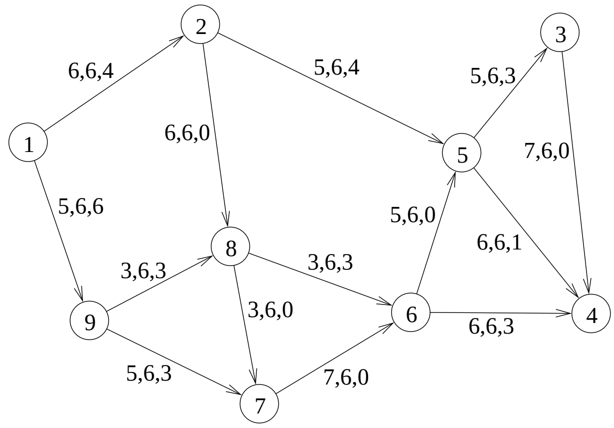
Vilket känt optimeringsproblem är detta? Finn en optimal lösning med lämplig metod. Ange hur mycket tid Bosse kommer att använda till att köra på vägar han redan har letat på. (3p)

c) Betrakta problemet i uppgift b. Bosse kommer plötsligt ihåg hur han körde när han hämtade pensionärerna. Hur förändras problemet av det? (1p)

Uppgift 3

Bosse har inte bara en buss, han har även kor. Nu har han fått en beställning på tre kor till gården i nod 3, fyra kor till gården i nod 4, och tre kor till gården i nod 7, i följande graf. De 10 korna är nu i nod 1, och Bosse ser ingen annan möjlighet än att gå med varje ko dit den ska. Han kan bara hantera en ko i taget, vilket betyder att tidsåtgången blir linjär i antalet kor med de avståndskoefficienter som anges i grafen. (Han räknar inte med tiden det tar att gå tillbaka.) Bosse vill inte gå mer än 6 gånger med ko i någon båge.

På bågarna i grafen står först avståndet, sedan hur många kor man maximalt kan förflytta den vägen, och sist ett förslag på hur Bosse borde göra transporterna, framtaget av en pensionär med förflutet inom optimeringskonsulteri.



a) Bosse litar inte på pensionärer, och vill kontrollera om förslaget ger minsta kostnaden. Hjälp honom med det (mha. simplexmetoden för nätverk). (2p)

b) Bosse hittar ett fel. Avståndskoefficienten på båge (1,9) ska vara 6, inte 5. (Huruvida pensionären gjorde det med flit vet inte Bosse.) Finn optimallösning med simplexmetoden för nätverk. Starta med förslaget i uppgift a. (2p)

c) Bosse känner till en hemlig stig genom skogen från nod 8 till nod 5. Hur lång får den vara om det ska vara lönsamt att använda den? Utgå från förslaget i uppgift a. (1p)

Uppgift 4

Pfutzer Pills ska göra en ny medicin, och tittar speciellt på hur kombinationen av två mycket hemliga ingredienser fungerar. Man låter x_1 och x_2 ange andelen av de två ämnena, vilket ger bivillkoret $x_1 + x_2 \leq 1$. (Man har även utfyllnadsämnen utan effekt som kan tillsättas.) Givetvis har man också bivillkoren $x_1 \geq 0$, och $x_2 \geq 0$.

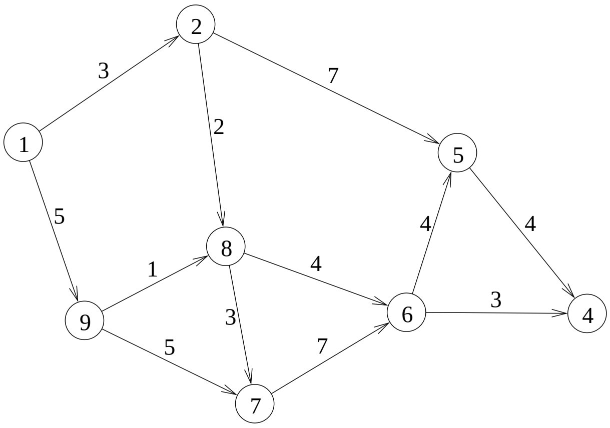
Den medicinska bieffekten av en blandning av de två ämnena har undersökts med ett stort antal tester på väldigt små djur. Man har kommit fram till att mätpunkterna kan approximeras ganska bra av funktionen $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - x_1x_2 - 2x_1 - x_2$, som man vill minimera.

a) Använd Zoutendijks metod för att ta reda på vilken blandning som är bäst. Starta i punkten (0,0). (3p)

b) Antag att summan av de två ingredienserna blir precis 1 och att båda ingår i blandningen (dvs. att $x_1 + x_2 = 1$ och $x_1 > 0$ och $x_2 > 0$ gäller i optimalpunkten). Använd KKT-villkoren för att avgöra om detta antagande stämmer. (Du får inte använda resultatet från uppgift a.) (3p)

Uppgift 5

SJ behöver flytta tomvagnar från nod 1 i nedanstående graf till nod 4. Man kopplar på dem på existerande tåg som går på bågarna i grafen. Varje nod innebär en rangering (dvs. att vagnar flyttas mellan tåg). På bågarna står hur många tomvagnar man maximalt kan koppla på det tåget.



a) SJ vill helt enkelt flytta så många tomvagnar som möjligt från nod 1 till nod 4. Finn maxflöde mellan dessa noder. Starta med flöde noll. Gör alla steg i metoden tydligt. Ange/rita in minsnitt. (3p)

b) Rangering tar mycket tid och är kostsamt. Man vill därför finna en väg från nod 1 till nod 4 som har minimalt antal rangeringar (dvs. noder). Hur kan detta göras med standardmetod genom att modifiera grafen? Formulera problemet och lös det med lämplig standardmetod. Visa stegen i metoden tydligt. (3p)

Uppgift 6

Tages Touring ska köpa in flodbåtar som kan användas för turister på Stångån. Tage tänker sig att de ska köra från bryggan strax söder om Hjulsbro till småbåtshamnen strax innan Roxen, och tillbaka. Det finns två olika typer av båtar, nämligen typ 1 som görs vid Rhen, och typ 2 som görs i Lausanne.

Tage har lagt undan 10 miljoner, och en båt av typ 1 kostar 2 miljoner i inköp, medan en av typ 2 kostar 3 miljoner. Han kan inte få tag på fler än 4 båtar av typ 1 och 3 av typ 2.

En båt av typ 1 tar 25 passagerare och en båt av typ 2 tar 40 passagerare, och Tage vill maximera antal passagerare han kan ta med.

Formulera problemet att bestämma hur många båtar av varje typ Tage ska köpa som ett linjärt heltalsproblem. Lös problemet med Land-Doig-Dakins trädsökningsmetod. Tvådimensionella LP-problem får lösas grafiskt. Ange lösning och målfunktionsvärde. (3p)

Uppgift 7

Fem studenter på sommarjobb ska göra fem uppgifter i Trädgårdsföreningen: gräsklippning, ogräsrensning, skräpplockning, målning av bänkar samt plantering av roliga små buskar. Varje student ska göra en av uppgifterna, och varje uppgift måste bli gjord. Man har uppskattat tiden det skulle ta för varje student att göra varje uppgift, och detta ges i matrisen nedan, där rader motsvarar studenter och kolumner uppgifter. Man vill fördela uppgifterna så att den totala arbetstiden minimeras.

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 4 & 5 & 7 \\ 10 & 4 & 6 & 5 & 8 \\ 12 & 5 & 5 & 6 & 9 \\ 9 & 4 & 6 & 6 & 10 \\ 10 & 7 & 9 & 7 & 10 \end{pmatrix}$$

a) Lös problemet med ungerska metoden. Ange optimal lösning samt målfunktionsvärde. Ange även dual optimallösning och kontrollera starka dualsatsen. (3p)

b) Antag att student 2 (rad 2) väldigt gärna vill klippa gräs (kolumn 1), och därför tänker öva på gräsklippning. Hur mycket måste studenten sänka sin tid för den uppgiften för att få uppdraget? Lös inte om problemet, utan använd duallösningen från uppgift a. (1p)