Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP88/TEN 1
OPTIMERING FÖR INGENJÖRER

Datum:	25 augusti 2017
Tid:	14.00-19.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	9
Antal sidor:	7
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

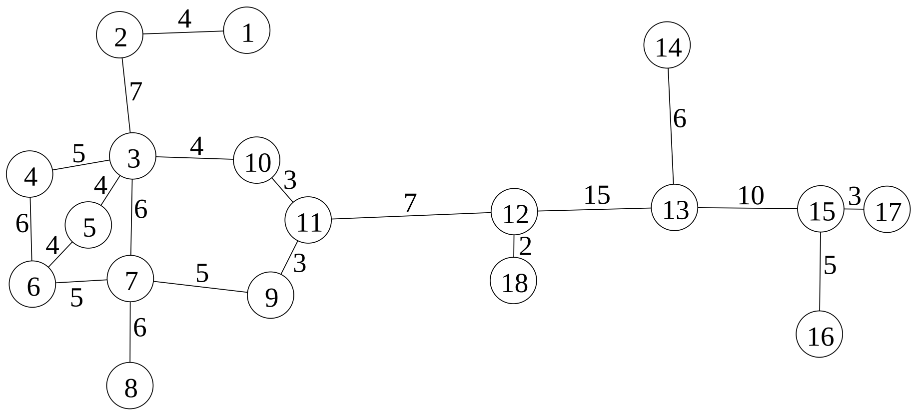
Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Två dagar om året ökar antalet personer i Skänninge från 4 000 till mer än 100 000. Det är under Skänninge Marken, som infaller den första onsdagen och torsdagen i augusti. Då uppträder en mängd intressanta optimeringsproblem.

a) Dagen efter, innan kl 9 på morgonen, ska alla gator där marknaden pågått städas. Nedanstående graf visar marknadsgatorna. Antag att en gata blir städad av att sopmaskinen kör en gång längs hela gatan, i valfri riktning. Vilket känt optimeringsproblem är det att städa alla dessa gator så snabbt som möjligt med en sopmaskin? Koefficienterna på bågarna är avstånd, och vi antar att maskinen kör med konstant hastighet (oavsett om den sopar eller inte).



Problemet kan reduceras genom eliminering av bågar där ena ändnoden har valens ett. Förklara varför, och genomför reduktionen. (2p)

b) Lös optimeringsproblemet i uppgift a med lämplig metod. Utnyttja resultatet av uppgift a. (Det är även tillåtet att lösa problemet utan reduktion, men det blir jobbigare.) Ange det totala avståndet maskinen får tillryggalägga, inklusive det som reducerades i uppgift a. (3p)

c) Betrakta problemet i uppgift a-b. Det visar sig att det inte räcker med att sopmaskinen kör en gång på varje gata. Istället måste man köra en gång på ena sidan och en gång på andra. Man kan dock åka i valfri riktning. Blir optimeringsproblemet lättare eller svårare att lösa? Motivera. Kommer den optimala sträckan att bli precis dubbelt så lång som i uppgift a-b, eller kan den bli lite kortare eller lite längre? Lös inte om, utan motivera svaret på annat sätt. (2p)

Uppgift 2

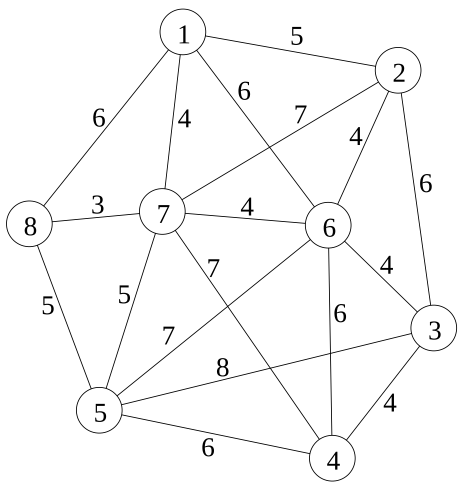
Lill-Bengt befinner sig på tivolit, nod 16 i grafen i uppgift 1. Gammel-Berta står mitt på torget, nod 5. De ska bestämma vid vilken nod de ska mötas. Gammel-Berta går långsammare än Lill-Bengt, så hon behöver tre gånger så lång tid som han för varje meter. De vill träffas så snart som möjligt, och börjar samtidigt gå mot varandra. De vill meddela varandra (via mobil) vid vilken nod de ska mötas.

Lös problemet genom att först finna kortaste (snabbaste) väg för Lill-Bengt mot Gammel-Berta, dvs. från nod 16 till nod 5, och sedan finna snabbaste väg åt andra hållet, från Gammel-Berta mot Lill-Bengt, dvs. från nod 5 till nod 16, men med alla bågkoefficienter multiplicerade med tre. Den nod som är bäst att träffas i är ju den där det maximala av de två nodpriserna är lägst. Ange denna nod. Använd standardmetod. (Att finna kortaste väg i en oriktad graf är som i en riktad graf, men man beaktar båda riktningarna på varje båge.) (3p)

Uppgift 3

I England finns något som kallas “Pub Crawl”, vilket innebär att man besöker alla traktens pubar och tar sig en öl på varje. Av naturliga skäl vill man då gå allra kortaste vägen. Putrick och hans kompisar är för unga för att dricka alkoholhaltiga drycker, men har kommit på något annat som liknar detta, nämligen en “Carousel Crawl”, där man ska åka varje karusell (och annan häftig attraktion) på tivolit på Skänninge Marken en gång. Man kommer (även) då att bli yr i huvudet, svag i knäna och allmänt omtöcknad, så det känns fortfarande viktigt att gå kortaste vägen mellan attraktionerna.

Putrick med kompisar vill alltså hitta kortaste rundturen som besöker varje attraktion (nod) i nedanstående graf. På bågarna står avstånd.



Vilket optimeringsproblem är detta? Finn en bra tur med en lämplig heuristik. Finn även en undre gräns för den totala sträckan genom att lösa en lämplig relaxation av problemet. Jämför gränserna. (3p)

Uppgift 4

Göte Godberg ska sälja godis på marknaden. Han har tre olika sorter, nämligen brända mandlar, marsipangodis och hårda karameller (som räcker länge i munnen), och funderar på hur mycket han ska ta med av varje sort. Begränsningar ges av marknadsståndets yta, storleken på Götes bil samt vissa bedömningar av efterfrågan baserade på tidigare års försäljning. Göte kommer fram till följande optimeringsmodell, där målfunktionen helt enkelt är att maximera vinsten, och variablerna står för hur många kg av varje sort han ska ta med.

$$
\begin{array}{llrcrcrcrl}
\max & z = & 5x_1 & + & 6x_2 & + & 2x_3 & & & \\
\text{då} & & 2x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & \leq & 10 & \quad (1) \\
& & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 8 & \quad (2) \\
& & x_1 & & & & & \leq & 4 & \quad (3) \\
& & & & x_2 & & & \leq & 3 & \quad (4) \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

a) Lös LP-problemet med simplexmetoden. Ange optimallösning och målfunktionsvärde. Vilka bivillkor blir aktiva? (3p)

b) Ange skuggpriset för varje bivillkor och förklara vad det betyder. (1p)

c) Göte funderar på att ta med spunnet socker. Den variabeln skulle få koefficient 2 i de två första bivillkoren och noll i de andra. Vinstkoefficienten skulle bli 4. Skulle lösningen förbättras av spunnet socker? (1p)

Uppgift 5

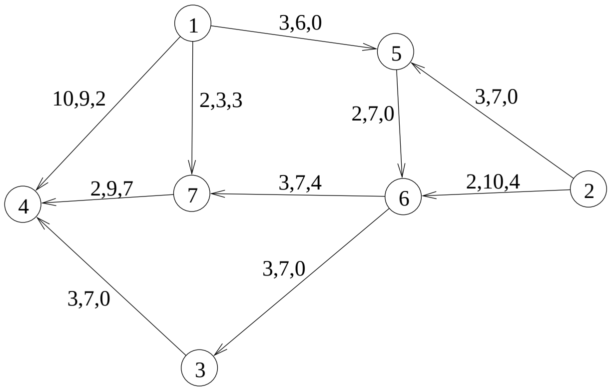
Charlie Chillström ska sälja egenhändigt gjord korv på marknaden, och tänker göra en jättestark korv. Han tänker blanda två sorters chili, nämligen Habanero och Piri-piri. Han låter x_1 och x_2 ange mängden av de två sorterna. Charlie eftersträvar en smakeffekt som får det att tåras i ögonen på de flesta. Han har genom djupa studier (på sig själv och sin familj) kommit fram det bästa resultatet fås av att minimera funktionen $f(x) = 2x_1^2 + 4x_2^2 - 5x_1x_2 - 4x_1 - 3x_2$. Som bivillkor har han bara att ingen variabel får vara större än 2 (eller mindre än 0).

a) Använd KKT-villkoren för att avgöra om någon av extrempunkterna i det tillåtna området är optimal. (3p)

b) Använd Zoutendijks metod för att ta reda på vilken blandning som är bäst. Starta i punkten (0,0). (3p)

Uppgift 6

Mitt under marknaden behöver man flytta varor genom staden. Man har 5 släpvagnar i nod 1 och 4 i nod 2 och alla dessa 9 ska till nod 4. Marknadsledningen har infört begränsningar på hur mycket man får förflytta på de olika gatorna. Den totala kostnaden beräknas som avstånd gånger antal vagnar. Bågarna i grafen nedan är märkta med avstånd, övre gräns samt hur man gjorde förflyttningarna förra året.



a) Kontrollera mha. simplexmetoden för nätverk om förra årets flöde hade minimal kostnad. (2p)

b) I hastigheten har man glömt att båge (1,7) är helt avstängd sedan man byggde om järnvägen genom Skänninge. För att finna en ny minkostnadslösning kan man öka kostnaden på båge (1,7) mycket (t.ex. till 20), och optimera om med simplexmetoden för nätverk. Starta med flödet i uppgift a. (2p)

c) Betrakta problemet i uppgift b. Hur mycket behöver man minst öka kostnaden på båge (1,7) för att uppnå önskad effekt? (1p)

Uppgift 7

Marknadsarrangörerna funderar på hur många stånd man ska placera på torget. Man klassificerar dem i två grupper, de med ätbara varor och de med andra varor, eftersom köbildningen blir olika för dessa grupper. Faktorer som talar mot för många stånd är att det kan bli för trångt, så att kunderna undviker torget, och köplusten kan avta. Samtidigt blir förtjänsten för låg om det är för få stånd.

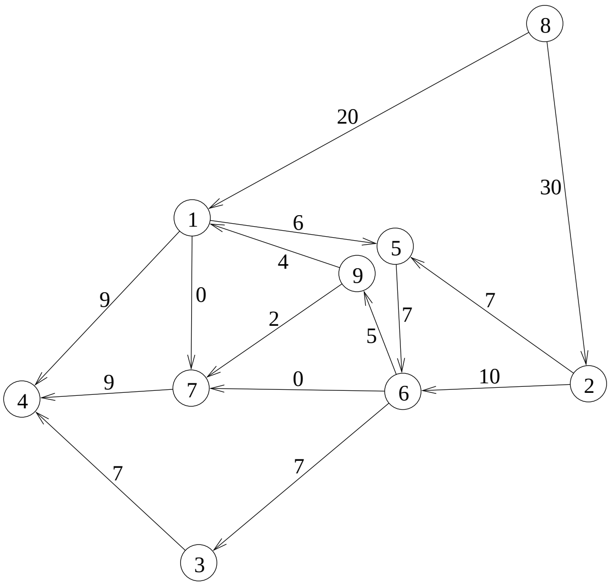
Låt x_1 ange antal stånd med ätbara varor, och x_2 antal stånd med andra varor. Man formulerar följande linjära heltalsproblem för att finna bästa fördelningen.

$$
\begin{array}{lll}
\max & z = & 4x_1 + 3x_2 \\
\text{då} & & 3x_1 + x_2 \leq 20 \\
 & & 2x_1 + 2x_2 \leq 17 \\
 & & 0 \leq x_1 \leq 6, \text{ heltal} \\
 & & 0 \leq x_2 \leq 5, \text{ heltal}
\end{array}
$$

Lös problemet med Land-Doig-Dakins trädsökningsmetod. Tvådimensionella LP-problem får lösas grafiskt. Ange lösning och målfunktionsvärde. (3p)

Uppgift 8

Trafikstockningar är ett reellt problem i anslutning till Skänninge Marken. Trafik kommer från Linköping, via Mantorp, nod 8 i följande graf, och ska till Motala, via utfarten i nod 4. På bågarna står ett uppskattat mått på hur många bilar per tidsenhet som kan passera.



Problemet kommer när man stänger av gatorna (bågarna) (1,7) och (6,7). Båge (9,7) är en liten gata som går genom lugna villakvarter, och vanligtvis inte har genomfartstrafik, men det är möjligt att använda den vid detta speciella tillfälle.

a) Hur många bilar per tidsenhet kan maximalt ta sig från nod 8 till nod 4, och hur ska de köra? Använd standardmetod och beskriv alla steg noga. Ange minsnitt. (3p)

b) Finns det en lika bra lösning utan båge (9,7)? (1p)

Uppgift 9

Fem Skänningebor ska turas om att stå i tombolakiosken. Kiosken ska vara bemannad de 10 timmarna från kl 10 till kl 20, så varje person måste stå där 2 timmar. Passen blir då 10-12, 12-14, 14-16, 16-18 och 18-20.

Varje person får ange sin "kostnad" (olägenhet, besvär etc) för varje pass, se följande matris där rader motsvarar passen och kolumnerna personerna, och man har kommit överens om att det vore rättvist att minimera den totala kostnaden.

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 12 & 9 & 14 & 6 \\ 13 & 18 & 15 & 10 & 4 \\ 16 & 8 & 12 & 5 & 9 \\ 7 & 14 & 9 & 11 & 13 \\ 16 & 11 & 14 & 6 & 10 \end{pmatrix}$$

a) Lös problemet med ungerska metoden. Ange optimal lösning samt målfunktionsvärde. Ange även dual optimallösning och kontrollera starka dualsatsen. (3p)

b) Antag att person 1 (kolumn 1) väldigt gärna vill stå andra passet (rad 2). Hur mycket måste personen sänka sin kostnad för det passet för att få det? Lös inte om problemet, utan använd duallösningen eller reducerade kostnader från uppgift a. (1p)