Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP88/TEN 1
OPTIMERING FÖR INGENJÖRER

Datum:	19 oktober 2017
Tid:	14.00-19.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	7
Antal sidor:	6
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

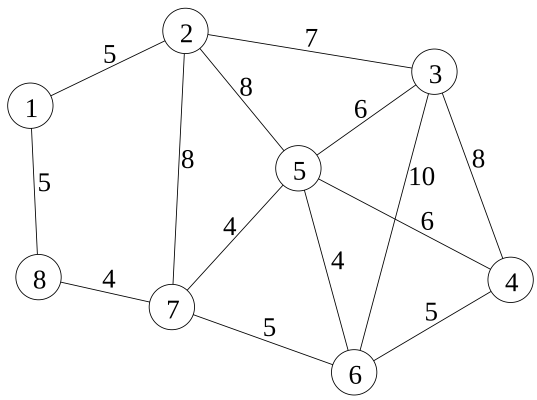
Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Marry Hotter ska börja på trollskola. Hon och några andra blivande trollungar ska hämtas av den jättelika vaktmästaren Sigrid. Sigrid är inte ett riktigt troll, och får därför inte färdas med flygande kvast, utan måste använda vägar. I nedanstående graf motsvarar varje nod ett barn som ska hämtas, bågarna är de vägar som kan användas, och är märkta med avstånd. Sigrid vill finna den kortaste rundturen (som börjar och slutar i nod 1) för att hämta upp alla barn.



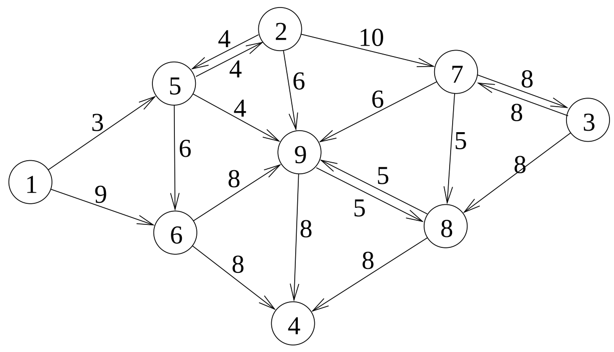
a) Vilket optimeringsproblem är detta? Finn en bra tur med en lämplig heuristik. Finn även en undre gräns för den totala sträckan genom att lösa en lämplig relaxation av problemet. Jämför gränserna. (3p)

b) Den elaka häxan Vålde-mor (som under en vild fest orsakade ett vanprydande ärr i Marrys panna) vill hindra Marry från att komma fram. Vålde-mor vill placera ut sina underhuggare vid vissa av noderna, så att alla vägar övervakas. Hon vill använda så få underhuggare, dvs. noder, som möjligt. Vilket optimeringsproblem är detta? Finn en bra lösning med en heuristik. (2p)

c) Sigrid fruktar bakhåll längs vägarna, och skickar i förväg husalfen Alf för att genomsöka vägarna. Finn den kortaste rundturen för Alf som genomgår alla bågar med lämplig metod. (3p)

Uppgift 2

Marry ska träffa sina vänner Ronny och Hermelinione. Marry befinner sig i nod 1 i följande graf, Ronny i nod 2 och Hermelinione i nod 3. Alla börjar samtidigt gå mot nod 4, och använder kortaste vägarna. Bågkoefficienterna anger avstånd, och alla personer rör sig med konstanta hastigheten 1.



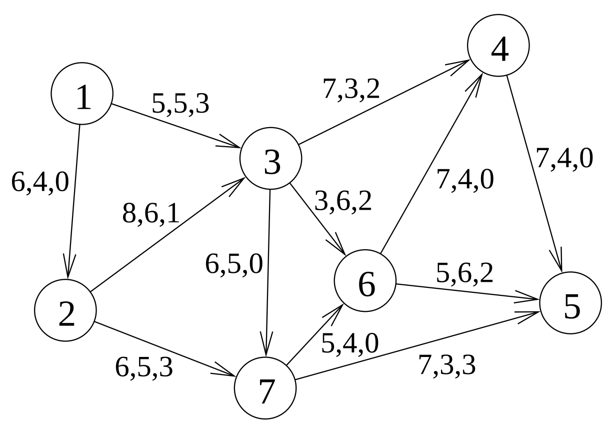
a) Hur går de, och när är alla tillsammans i nod 4? Använd lämplig metod och visa stegen tydligt. (3p)

b) Träffas några av dem tidigare, om någon kan tänka sig att vänta lite i en annan nod än 4, och i så fall var och när? Utnyttja resultaten i uppgift a. (2p)

c) Ange, för varje nod i nätverket, hur lång tid det skulle ta för Marry att gå dit från nod 1. (1p)

Uppgift 3

Hermeliniones föräldrar är smugglare. (Något som vissa andra elever rynkar på näsan åt.) Följande graf anger möjliga smuggelvägar. Man har 3 lådor med smuggelgods i nod 1 och 4 i nod 2 och vill frakta 2 till nod 4 och 5 till nod 5. I noderna måste smuggelgodset packas om till nya gömmor i nya fordon. På varje båge står en kostnad som baseras på risken för upptäkt. Man antar att kostnaden ökar linjärt med antal lådor som transporteras, och vill minimera summan av kostnaderna. På bågarna i grafen anges kostnadskoefficient, bågkapacitet samt ett förslag på hur man skulle kunna skicka.



a) Kontrollera mha. simplexmetoden för nätverk om förslaget ger minimal kostnad. (2p)

b) I en parallellklass går Drygo, en mobbartyp med debila följare och en aversion mot smugglare. Han befinner sig vid båge (7,5), som därför anses osäker och bör undvikas. För att finna en ny minkostnadslösning kan man öka kostnaden på båge (7,5) mycket (till 20), och optimera om med simplexmetoden för nätverk. Gör det och starta med flödet i uppgift a. (2p)

c) Betrakta problemet i uppgift b innan ändringen. Hur mycket behöver man minst öka kostnaden på båge (7,5) för att uppnå önskad effekt? (1p)

d) Man struntar i all försiktighet, och vill smuggla så mycket som möjligt från nod 1 till nod 5. Utnyttja kapaciteterna i grafen, starta från noll och finn maxflöde. Visa alla steg i metoden. Ange minsnitt. (3p)

Uppgift 4

Professor Tejp (som verkar vara elak, men i hemlighet var kär i Marrys mor) ska göra en häxblandning av drakspott och myrsyra. Han låter x_1 och x_2 ange mängden av dessa ingredienser. Han har gjort många försök tidigare och kommit fram till att det bästa resultatet fås av att minimera funktionen $f(x) = x_1^2 + 5x_2^2 - 2x_1x_2 - 6x_1 - 8x_2$. Som bivillkor har han att summan av variablerna inte får vara större än 2, och mängden drakspott inte större än 1 (och ingen variabel mindre än 0).

a) Lös problemet med Zoutendijks metod. Starta i (0,0). (3p)

b) Använd KKT-villkoren för att visa att punkten du fick i uppgift a är optimal och att $(0, 0)$ inte är det. (Om du inte har gjort uppgift a: Använd KKT-villkoren för att avgöra om extrempunkterna i det tillåtna området är optimala.) (2p)

Uppgift 5

Sigrid föder upp drakar i skogen bakom skolan, och ska nu införskaffa några drakägg. Det finns två sorter hon överväger, norsk blårygg som kostar 6 dubloner styck, och finsk perkiles, som kostar 5 dubloner styck. Sigrid har bara 20 dubloner att använda till detta. Just nu finns två ägg av varje sort tillgängliga. Sigrid har uppskattat värdet av en vuxen drake baserat på personlig glädje minus besvär och kommit fram till koefficienten 7 för norsk blårygg och 5 för finsk perkiles. Hon vill köpa ägg så att det totala värdet maximeras. Lös problemet med Land-Doig-Dakins trädsökningsmetod. Tvådimensionella LP-problem får lösas grafiskt. Ange lösning och målfunktionsvärde. (3p)

Uppgift 6

Man ska sätta ihop ett lag i sporten Kvittsch och välja vilka personer som ska spela var. Det behövs målvakt, höger- och vänsterförsvarare samt höger- och vänsteranfallare. Man har redan valt fem spelare, men inte bestämt vilken position de ska ha.

Man har använt ett poängsystem för att värdera de olika spelarna på de olika positionerna, och poängen ges i matrisen nedan, där rader står för spelare och kolumner för positionerna (den ordning de nämndes ovan). (Marry är spelare 1.) Man vill maximera summan av poängen.

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 10 & 10 & 11 & 12 \\ 6 & 6 & 8 & 10 & 11 \\ 4 & 8 & 7 & 9 & 9 \\ 7 & 4 & 4 & 5 & 3 \\ 5 & 5 & 5 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

a) Lös problemet med ungerska metoden. (Ledning: Det är nog enklare att multiplicera målfunktionen, dvs. alla kostnader, med -1 än att göra om metoden till maximering.) Ange optimal lösning samt målfunktionsvärde. Ange även dual optimallösning och kontrollera starka dualsatsen. (3p)

b) Antag att Ronny (rad 4) väldigt gärna vill vara högeranfallare (kolumn 4). Hur mycket måste han öka sina poäng för den positionen för att få den? Lös inte om problemet, utan använd duallösning eller reducerad kostnad från uppgift a. (1p)

Uppgift 7

Marry ska beställa en trollstav av Oliv-Anders. Den görs av tre träslag, nämligen fläder, kastanj och päron, och dess magiska egenskaper beror på blandningen. Oliv-Anders sätter upp ett optimeringsproblem för sammansättningen, där x_1 står för hur många gram flädert rä som ingår, x_2 antal gram kastanjträ och x_3 antal gram päronträ.

Staven får inte väga mer än 200 gram. Av hållbarhetsskäl får det inte ingå mer än 100 gram fläder, och mängden kastanj får inte vara mer än mängden päron. Dessutom finns ett fjärde bivillkor som baseras på densitet och hårdhet, se nedan. Målfunktionen är ett något förenklat mått på den magiska styrkan, och man får följande optimeringproblem.

$$
\begin{array}{llrcrcrcrl}
\max & z = & 4x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & \leq & 200 & (1) \\
& & x_1 & & & & & \leq & 100 & (2) \\
& & & & x_2 & - & x_3 & \leq & 0 & (3) \\
& & x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & \leq & 150 & (4) \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

a) Lös LP-problemet med simplexmetoden. Ange optimallösning och målfunktionsvärde. Vilka bivillkor blir aktiva? (3p)

b) Ge skuggpriset för varje bivillkor och ange vad man skulle tjäna på att öka vikten på staven och att öka tillåtna mängden flädertrå. (2p)

c) Man skulle kunna ta med lönnträ i staven. Den variabeln skulle få koefficient 2 i det första bivillkoret och noll i det andra och tredje och 1 i det fjärde. Magikoefficienten skulle bli 3. Skulle trollstaven förbättras av lönnträ? (1p)