

## TAOP88/TEN 1 OPTIMERING FÖR INGENJÖRER

**Datum:** 2 januari 2018  
**Tid:** 14.00-19.00  
**Hjälpmedel:** Miniräknare  
Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*  
Anteckningar i boken får förekomma.  
**Antal uppgifter:** 9  
**Antal sidor:** 7  
Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.  
Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.  
**Examinator:** Kaj Holmberg  
**Jourhavande lärare:** Kaj Holmberg, tel 013-282867  
**Resultat meddelas per e-post**

### Tentamensinstruktioner

#### När Du löser uppgifterna

*Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.  
Motivera alla påståenden du gör.  
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.*

*Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.  
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.*

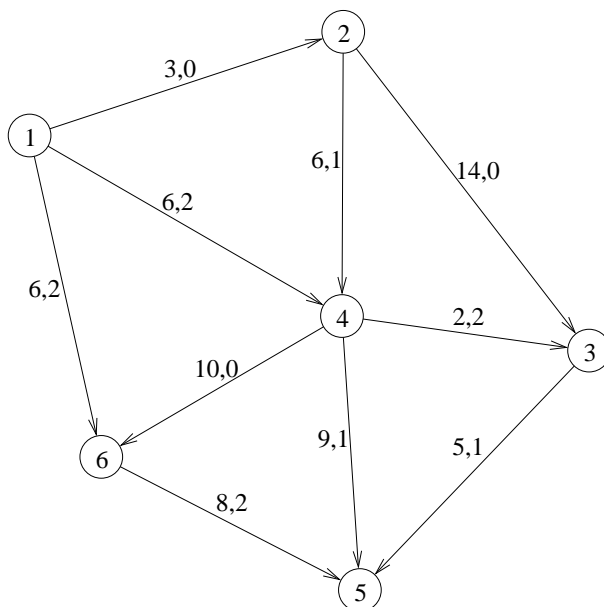
#### Vid skrivningens slut

*Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.  
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.  
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.*

### Uppgift 1

Kommunstyrelsen i Lillköping bestämmer sig för att använda en del av snöröjningsbudgeten för att finansiera en filmatisering av en serie böcker om mord i Lillköping, skrivna av den berömda författaren Kalle R Tofs. Man vill att Lillköping ska bli mer känt (som Ystad med Wallander), och chansar på att det inte ska komma så mycket snö nästa vinter.

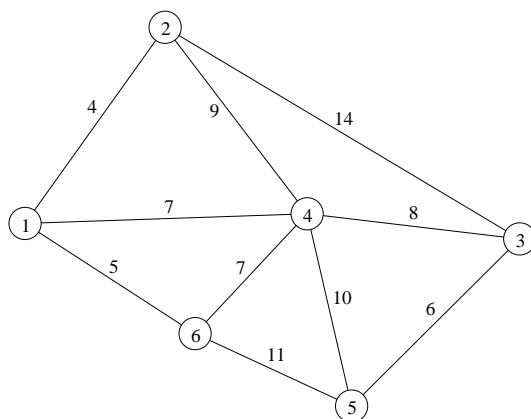
Studenten Allis anlitas som allt-i-allo av det nya filmbolaget Isfilm för att hjälpa till med diverse sysslor. Den första uppgiften blir att planera förflyttningen av inspelningsutrustning. Den befinner sig på olika platser, packade i containrar på släpvagnar. Släpvagnarna ska kopplas på lastbilar, högst två på varje dragfordon. Det finns fyra släpvagnar i nod 1 i grafen nedan, och en i nod 2, och man vill ha fyra i nod 5 och en i nod 3. På bågarna står kostnaden per släpvagn, och alla bågar har övre gräns två. På bågarna står också flödet i en tidigare uträknad lösning.



- Kontrollera mha. simplexmetoden för nätverk om den angivna lösningen ger minimal kostnad. (2p)
- En vägarbete höjer kostnaden på bågen (4,3) till 5. Finn en ny minskostnadslösning med simplexmetoden för nätverk. Starta med flödet i uppgift a. (2p)
- Betrakta problemet i uppgift a innan ändringen. Hur mycket behöver man minst minska kostnaden på båge (2,3) för att den ska användas? (1p)

## Uppgift 2

En av uppgifterna Allis får är att varje morgon hämta ett antal skådespelare på de hotell de bor och ta dem till inspelningsplatsen. I följande graf är nod 1 inspelningsplatsen (där turen börjar och slutar) och de andra noderna hotell där personer ska hämtas. Allis ska köra en rundtur med en minibuss och hämta upp alla. På bågarna står tiden varje länk tar, och man vill minimera tiden för hela rundturen.



Vilket optimeringsproblem är detta? Finn en bra tur med en lämplig heuristik. Finn även en undre gräns för den totala sträckan genom att lösa en lämplig relaxation av problemet. Jämför gränserna. (3p)

## Uppgift 3

Vid ett tillfälle ska man filma en stor explosion där ett antal bilar ska brinna upp. Man kan bara göra detta en enda gång, så det är viktigt att inspelningen blir bra då. Man har fem olika kamerateam och de ska filma explosionen ur olika vinklar. De olika vinklarna innebär dock olika svårigheter, och kamerateamen har olika skickligheter. I matrisen nedan ges uppskattade mått på hur bra de olika teamen (raderna) kan hantera svårigheterna vid de olika positionerna (kolumnerna). Man vill fördela uppgifterna så att det totala värdet av dessa mått maximeras. Varje team ska ta en position och varje position ska bemannas.

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 5 & 7 & 4 \\ 6 & 6 & 4 & 8 & 5 \\ 4 & 8 & 7 & 9 & 5 \\ 7 & 4 & 4 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 5 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Multiplicera målfunktionen, dvs. alla kostnader, med  $-1$ , och lös problemet med ungerska metoden. Ange optimal lösning samt målfunktionsvärde. Ange även

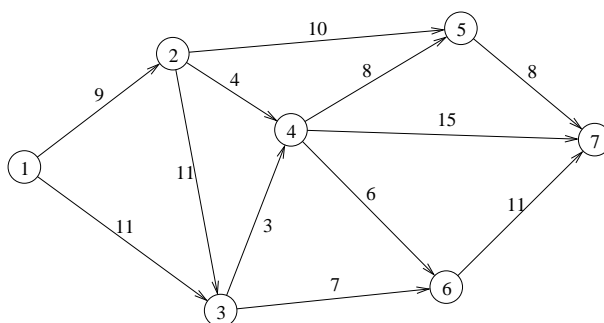
dual optimallösning och kontrollera starka dualsatsen. (3p)

#### Uppgift 4

Isfilm måste köpa nya filmkameror. Man har två fina, dyra sorter att välja på, och frågan är hur många av varje. En kamera av typ 1 kostar 20 000 kr och en av typ 2 kostar 15 000 kr. Man vill inte använda mer än 50 000 kr för inköpen. Man vill maximera den uppskattade nyttan av kamerorna, där typ 1 ges koefficienten 4 och typ 2 koefficienten 3. Lös problemet med Land-Doig-Dakins trädsökningsmetod. Tvådimensionella LP-problem får lösas grafiskt. Ange lösning och målfunktionsvärde. (3p)

#### Uppgift 5

För att spela huvudrollen, Malin Beck, har man kontrakterat en berömd och dyr skådespelerska, Nemi Rapps, som kräver särskild behandling. Bland annat ska hon hämtas individuellt varje morgon (av Allis i limousine) och hon blir sur om bilfärden tar för lång tid. Därför måste Allis ta den snabbaste vägen. Följande graf anger möjliga vägar, med bågarna märkta med tiden de tar. Nod 1 är hotellet där Nemi bor och nod 7 är inspelningsplatsen.



- Finn snabbaste väg från nod 1 till nod 7 med lämplig metod. (2p)
- Nemi vill gärna promenera från nod 6 till nod 7, för att kunna ge autografer till publiken. Finn snabbaste väg från nod 1 till nod 6 mha. lösningen i uppgift a. Lös ej om problemet. (1p)
- Antag att man kan köra fortare på båge (4,7) om man struntar i hastighetsbegränsningen. Hur kort måste tiden vara, för att billigaste vägen från 1 till 7 ska förändras av detta? Motivera med nodpriser. (1p)

#### Uppgift 6

Det kommer att krävas mycket "blod" vid inspelningen, och sminkavdelningen

funderar över vilken blandning som är bäst. Man använder färglös sirap samt röd och gul karamellfärg. Man låter  $x_1$  och  $x_2$  ange mängden av röd och gul färg. Det påstås att den bästa nyansen fås genom att minimera funktionen  $f(x) = 2x_1^2 + 4x_2^2 - 5x_1x_2 - 8x_1 - 2x_2$ . Som bivillkor har man att summan av variablerna inte får vara större än 1.5, mängden rött får inte vara mindre än mängden gult, och ingen variabel större än 1 (eller mindre än 0).

a) Lös problemet med Zoutendijks metod. Starta i  $(0,0)$ . (Ledning: Den optimala steglängden blir lika med den maximalt tillåtna i varje iteration.) (3p)

b) Använd KKT-villkoren för att kontrollera varje extrempunkt i det tillåtna området avseende optimalitet. (3p)

### Uppgift 7

För att konstruera scendekor behöver man anlita tecknare, snickare och målare. Man vill minimera lönekostnaden, och bivillkoren ges av kraven på det arbete som måste utföras. Det finns dock vissa uppgifter som kan utföras av mer än en yrkeskategori. Det hela leder fram till följande optimeringsmodell, där  $x_1$  står för antal tecknare,  $x_2$  antal snickare och  $x_3$  antal målare. (Man kan hyra in på deltid, så variablerna behöver inte vara heltal.)

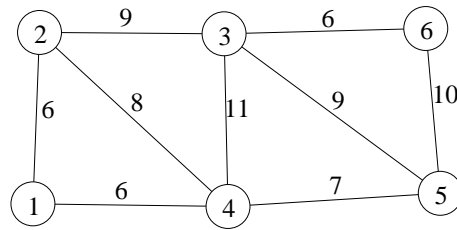
$$\begin{array}{rcll} \min z = & 5x_1 & + & 4x_2 & + & 3x_3 & & \\ \text{då} & 10x_1 & & & + & 2x_3 & \geq & 20 & (1) \\ & & & 10x_2 & + & 2x_3 & \geq & 20 & (2) \\ & & & & & 10x_3 & \geq & 20 & (3) \\ & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 & \end{array}$$

a) Formulera LP-dualen till LP-problemet ovan. Lös denna LP-dual med simplexmetoden. Ange optimal primallösning och duallösning samt målfunktionsvärde. (5p)

b) Man skulle kunna anlita personer via ett bemanningsföretag. En sådan person skulle få koefficient 4 i samtliga bivillkor, samt målfunktionskoefficient 4. Skulle detta förbättra lösningen? (1p)

### Uppgift 8

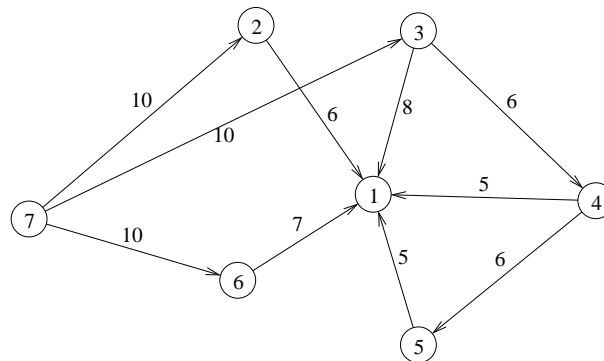
Under några dagar stängs en del av Lillköping av och några utomhusscener spelas in. Efteråt ligger det massor skräp på gatorna, och Allis får i uppdrag att städa. I följande graf är bågarna de gator som ska städas. På bågarna står tiden det tar att städa gatan (i minuter), och avstängningen hävs när alla gatorna är städade. Allis vill därför hitta en rundtur som gör att alla gatorna blir städade så snabbt som möjligt.



- a) Finn en optimallösning till problemet. Beskriv stegen i metoden noggrant. Ange rundtur och total tid. (3p)
- b) Det visar sig att det går tre gånger så snabbt att bara gå en gata jämfört med att städa den. Vad blir då totaltiden för lösningen i uppgift a? Kan detta göra att en annan lösning blir bättre? Motivera. (2p)
- c) De boende på gatan (3,4) är extra gnälliga. När kommer deras gata att vara städad? Kan man påverka den tiden utan att försämma lösningen? (Rundturen ska fortfarande ha minimal totaltid.) (2p)

### Uppgift 9

När det är dags för premiär på första filmen måste centrum i Lillköping stängas av. För att förhindra terrordåd med lastbil, kommer man att placera ut stora stenlejon som hinder. I följande graf är nod 1 centrum som ska stängas av och nod 7 representerar den enda infarten (alla andra vägar är redan avstängda). På bågarna står hur många stenlejon som skulle behövas för att stänga av gatan. Man vill minimera kostnaden för stenlejonen (dvs. minimera antal stenlejon som behövs).



Detta problem kan lösas med en standardmetod. Förklara varför, lös problemet och visa varje steg i metoden tydligt. (Ledning: Det efterfrågade svaret kan ibland ses som en biprodukt när denna typ av problem löses.) (3p)