Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP88/TEN 1
OPTIMERING FÖR INGENJÖRER

Datum:	30 maj 2018
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	10
Antal sidor:	7
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

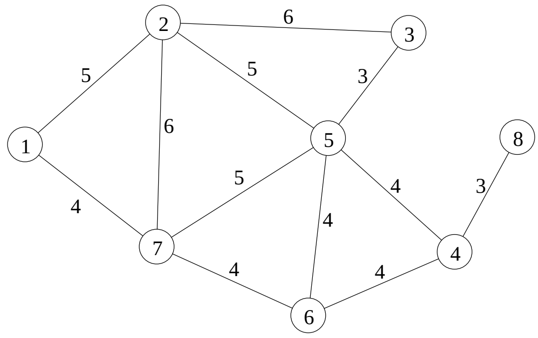
Herr och fru Svensksson ska göra en resa. Herr Svensksson har avdelat ett visst utrymme i sin väska till strumpor och kalsonger, och funderar nu på hur många han ska ta med sig. Det är volymen som är begränsande. Ett par kalsonger har volymen 3 och ett par strumpor har volymen 2. Totalt sett får inte dessa klädesartiklar ha större volym än 20. För att det inte bara ska bli kalsonger eller bara strumpor, kräver herr Svensksson att volymen av den ena sorten inte får vara större än dubbla volymen av den andra sorten (åt båda hållen). (Detta ger bivillkor av typen $x_1 \leq 2x_2$ och $x_2 \leq 2x_1$.) Han kan inte avgöra vad som är värt mest, så han sätter målfunktionskoefficient ett på båda sorterna, och vill maximera detta.

a) Lös problemet med Land-Doig-Dakins trädsökningsmetod. Tvådimensionella LP-problem får lösas grafiskt. (Tips: Gå ner i $\leq$-grenen först.) Ange lösning och målfunktionsvärde. (3p)

b) Egentligen vill herr Svensksson ha med sig precis lika många par av de två sorterna. Men det skulle ju göra det tillåtna området mindre, och kanske försämra lösningen. Avgör om det blir så genom att finna optimallösningen till detta problem. Observera att optimalitet måste vara bevisad. (1p)

Uppgift 2

Det är mer än två månader sedan sista snön försvann, och gruset man strödde ut under vintern som halkbekämpning ligger i högar på gatorna i Lillköping (där paret Svensksson bor). De ansvariga börjar fundera på att ta bort gruset, eftersom det är en fara för cyklister och andra tvåhjuliga fordon samt ger småpartiklar i luften som kan vara farliga att andas in. Följande graf visar gatorna i Lillköping. Alla gator har mycket grus på sig, och ska sopas. Att sopa en gata görs genom att köra en gång på gatan i valfri riktning. På bågarna står tiden det tar att sopa gatan (i minuter), och man vill hitta en rundtur som gör att alla gatorna är sopade så tidigt som möjligt.



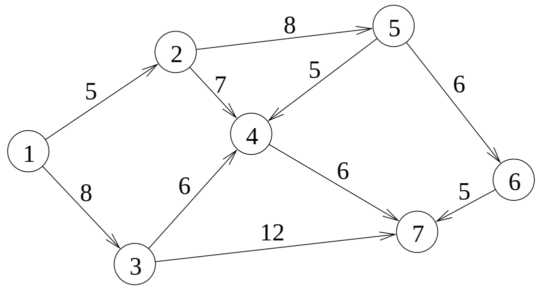
a) Finn en optimallösning till problemet. Beskriv stegen i metoden noggrant

Ange rundtur och total tid. (3p)

b) Det visar sig att det går tre gånger så snabbt att köra en gata om man inte sopar. Vad blir då totaltiden för lösningen i uppgift a? Kan detta göra att en annan lösning blir bättre? Motivera. (1p)

Uppgift 3

Paret Svensksson ser på kartan att hotellet de ska bo på ligger ganska långt från flygplatsen, och funderar på hur de ska åka från flygplatsen till hotellet. Följande graf anger möjliga vägar, med bågarna märkta med restid. Nod 1 är flygplatsen och nod 7 är hotellet.



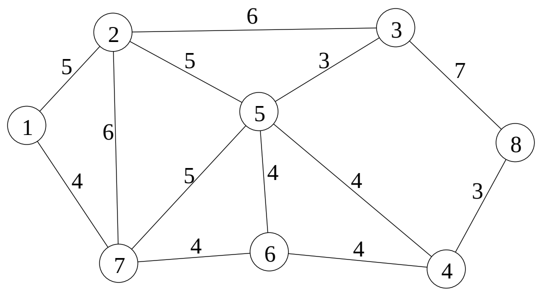
a) Finn snabbaste väg från nod 1 till nod 7 med lämplig metod. (2p)

b) Noderna i grafen innebär byte av buss eller tåg, och varje byte tar en viss tid. Beskriv generellt hur detta kan påverka den bästa lösningen. Lös om problemet om bytestiden i varje nod motsvarande 3 tidsenheter. (1p)

c) Betrakta problemet i uppgift a. Ett nytt alternativ dyker upp, nämligen en buss från nod 5 till nod 7. Den tar tiden 4. Skulle detta snabba upp resan? Lös ej om, utan motivera svaret med nodpriser. (1p)

Uppgift 4

Paret Svensksson sitter nu i sitt hotellrum och planerar dagens utflykt. I följande graf är nod 5 hotellet (där dagsturen ska börja och sluta) och de andra noderna motsvarar olika sevärdheter man vill besöka under dagen. Paret Svensksson är hurtiga, och tänker gå hela sträckan, men de är dock inte så hurtiga att de vill gå onödigt långt, utan vill finna en rundtur så att den totala sträckan blir så kort som möjligt. På bågarna står avstånd.



Vilket optimeringsproblem är detta? Finn en bra tur med en lämplig heuristik. Finn även en undre gräns för den totala sträckan genom att lösa en lämplig relaxation av problemet. Jämför gränserna. (3p)

Uppgift 5

Hotellet anordnar rundturer i buss för grupper av sina gäster. Man planerar fem rundturer samtidigt, och har fem reseledare som ska ta hand om grupperna. Reseledarna är sommaranställda ungdomar och kan olika mycket om sevärdheterna. Varje reseledare ska ta hand om en grupp, och varje grupp ska ha en reseledare. Frågan är vilken reseledare som ska ta hand om vilken grupp. Fru Svensksson råkar höra diskussionen i foajen, och erbjuder sig att hjälpa till med planeringen.

$$C = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 5 & 7 & 4 \\ 6 & 6 & 8 & 8 & 5 \\ 4 & 7 & 7 & 9 & 5 \\ 7 & 4 & 4 & 5 & 3 \\ 5 & 4 & 5 & 6 & 5 \end{pmatrix}$$

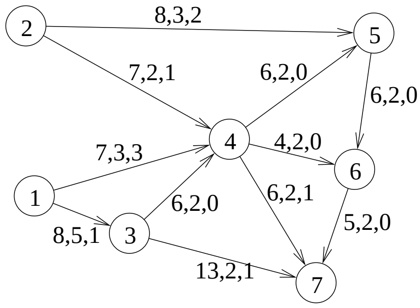
I matrisen nedan ges uppskattade mått på hur mycket de olika reseledarna (raderna) kan om de olika sevärdheterna (kolumnerna). Man vill fördela uppgifterna så att det total värdet av dessa mått maximeras.

Multiplicera målfunktionen, dvs. alla koefficienter i matrisen, med -1, så att det blir ett minimeringsproblem och lös problemet med ungerska metoden. Ange optimal lösning samt målfunktionsvärde. Ange även dual optimallösning och kontrollera starka dualsatsen. (3p)

Uppgift 6

Semesterorten paret Svensksson befinner sig på ligger vid ett stort hav och har en fiskehamn, där fiskebåtar anländer på kvällen med fisk, som ska levereras till de lokala restaurangerna. Paret Svensksson roar sig med att försöka finna det bästa sättet att transportera fångsterna från båtarna till restaurangerna.

Nedanstående graf ger möjliga transportvägar. Vid ett visst tillfälle finns tre lådor med fisk på båten i nod 2 och fyra lådor på båten i nod 1. Restaurangen i nod 4 vill ha tre lådor, den i nod 5 vill ha två lådor och den i nod 7 vill ha två lådor. På bågarna står kostnaden per låda, och en övre gräns för antal lådor. På bågarna står också flödet baserat på hur fiskarna brukar göra.



a) Kontrollera mha. simplexmetoden för nätverk om den angivna lösningen ger minimal kostnad. (Tips: Använd bl.a. båge (4,6) som basbåge.) Om inte, finn en ny minkostnadslösning med simplexmetoden för nätverk. Starta med det angivna flödet. (3p)

b) Det visar sig att restaurangen i nod 5 egentligen vill ha tre lådor. Det betyder att någon restaurang får en låda för lite. Modifiera nätverket så att optimeringen ger den bästa lösningen. (Problemet behöver ej lösas.) (1p)

Uppgift 7

Paret Svensksson ska tillbringa en dag i solen på stranden, och ska smörja på solkräm för att inte bli brända. De har två olika sorters solkräm med olika egenskaper, och tror att effekten kan bli ännu bättre genom att blanda dem. De låter x_1 och x_2 ange mängden av de två solkrämerna i blandningen. Efter djupa studier (på nätet) anser herr Svensksson att den bästa effekten fås genom att minimera funktionen $f(x) = 2x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1x_2 - 4x_1 - 2x_2$. Som bivillkor har man att summan av variablerna inte får vara större än 1, och ingen kräm får ingå med mer än dubbelt så mycket som den andra.

a) Lös problemet med Zoutendijks metod. Starta i (0,0). (Ledning: Den optimala steglängden blir lika med den maximalt tillåtna i varje iteration.) (3p)

b) Använd KKT-villkoren för att kontrollera varje extrempunkt i det tillåtna området avseende optimalitet. (Ledning: Man kan plocka bort två redundanta bivillkor.) (3p)

Uppgift 8

Paret Svensksson stöter på en gammal kvinna som säljer halsband på torget. Kvinnan har högar med röda, blå, gröna och gula kulor, som hon trär upp snören för att göra vackra halsband. Paret inleder ett samtal med kvinnan, där de frågar hur hon väljer vilka färger hon ska ta till ett halsband. De känner sig dock inte nöjda med svaret, som är att det är slumpmässigt.

Istället vill de hjälpa kvinna att finna det optimala halsbandet. De sätter upp följande optimeringsmodell, där x_1 står för antal röda kulor på ett halsband, x_2 antal blå, x_3 antal gröna och x_4 antal gula. Målfunktionen bygger på en bedömning av hur vackra de olika färgerna är, bivillkor 1 anger hur många kulor som får plats på ett halsband, och bivillkor 2 och 3 bygger på färgteoretiska samband om hur olika färger passar ihop.

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcrl}
\max & z = & 4x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & x_4 & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & \leq & 30 & \quad (1) \\
 & & 2x_1 & + & 3x_2 & & & & & \leq & 12 & \quad (2) \\
 & & & & x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & \leq & 16 & \quad (3) \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

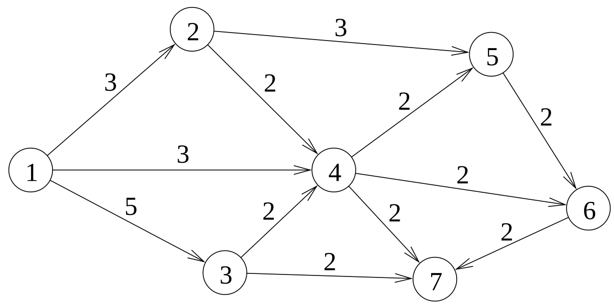
a) Lös detta LP-problem med simplexmetoden. Ange optimal primallösning och duallösning samt målfunktionsvärde. Vilka bivillkor blir aktiva? (3p)

b) Ange för varje färg hur mycket vackrare den behöver vara för att komma med på halsbandet (dvs. hur stor målfunktionskoefficienten behöver vara). (1p)

c) Det finns även svarta kulor. En sådan skulle få målfunktionskoefficient 3, samt koefficient 1 i samtliga bivillkor. Skulle svarta kulor förbättra lösningen? (1p)

Uppgift 9

Semesterorten paret Svensksson bor på har stora trafikproblem. Morgon och kväll är det fullständiga trafikstockningar i centrum. Herr Svensksson bestämmer sig för att titta närmare på problemet. Han noterar att på morgonen är det stora trafikflödet från nod 1 i nedanstående graf till nod 6. Han har kartlagt vilka vägar som kan användas, och bedömt deras kapaciteter, vilka anges i grafen. Nu vill han beräkna maximalt flöde från nod 1 till nod 6, och därmed få fram ett minsnitt. Denna information kommer han sedan att gå till de styrande i staden och be att de bygger ut kapaciteten på en eller flera av bågarna i minsnittet.



Hjälp honom med att lösa problemet och ta fram eftersökt information. Visa varje steg i metoden tydligt. (3p)

Uppgift 10

Barnen på dagiset "Bokmalen" (där paret Svenskssons dotter arbetar) leker "akademi" i sandlådan. Varje vecka röstar barnen om vem som ska få en godispåse, och leken går ut på att bråka så att de som inte tycker som en själv går därifrån (och därmed inte deltar i omröstningen). Man brukar utse en "sekretär" som räknar rösterna (dvs. någon som kan räkna). Förut var det Hårius, nu är det Sarius.

Sarius säger till Hårius att Arnius är dum mot tjejer, och att Hårius borde gjort något åt det då han var sekretär. Hårius säger att Arnius har stil och är en "vivör" (Hårius använder gärna ord han inte förstår), och att Sarius är den sämsta sekretären han har sett och borde gå hem. Några andra blir jättearga och går därifrån. Några låtsas inte höra, för de vill bara sitta kvar i sandlådan och kanske få godis.

Man kan konstruera två oriktade grafer som visar relationerna mellan barnen i sandlådan. Noderna motsvarar barnen, och i den första grafen betyder en båge att de två barnen är så osams att de inte kan sitta i sandlådan samtidigt. I den andra grafen betyder en båge att de två barnen är kompisar, så om den ene går, går också den andre, dvs. antingen är båda kvar eller så är ingen kvar.

Förklara för båda graferna vad följande egenskaper/begrepp betyder när det gäller möjliga grupperingar.
1. Grafen är fullständig.
2. Grafen består av tre sammanhängande komponenter.
3. Grafen är en matchning.
4. Grafen innehåller inga bågar.
5. En maximal klick.
6. En maximal oberoende nodmängd.
(4p)