Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP88/TEN 1
OPTIMERING FÖR INGENJÖRER

Datum:	7 januari 2019
Tid:	14.00-19.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	8
Antal sidor:	7
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Det nystartade lilla företaget Kak&Bak AB ska ha ett stånd på julmarknaden i Östanommånberga. Man ska sälja kakor av olika sorter, och funderar nu på hur många av varje sort man ska baka.

Man formulerar följande linjära optimeringsproblem, där x_j står för hur många kakor av sort j man ska göra. Målfunktionen anger den beräknade vinsten för varje kaksort, vilket ska maximeras. Bivillkor 1 kommer av den begränsade tillgången av ugnstid/plats, bivillkor 2 och 3 av den begränsade tillgången av två råvaror. Man utgår först från att alla kakor kommer att säljas.

$$
\begin{array}{llrcrcrcrl}
\max & z = & 2x_1 & + & 4x_2 & + & 6x_3 & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & x_2 & + & 2x_3 & \leq & 200 & \quad (1) \\
& & 2x_1 & + & x_2 & & & \leq & 180 & \quad (2) \\
& & & & x_2 & + & x_3 & \leq & 150 & \quad (3) \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

a) Lös detta LP-problem med simplexmetoden. Ange optimal primallösning och duallösning samt målfunktionsvärde. (3p)

b) Är optimallösningen unik? Om inte, ange vilka variabler som ingår i en alternativ baslösning (men inte deras värden) samt lösningens målfunktionsvärde. (1p)

c) Utgå från optimallösningen i uppgift a. Antag att man till viss kostnad kan skaffa lite mer av en av råvarorna som finns i begränsad mängd. Vilken råvara skulle man tjäna mest på att skaffa? (1p)

d) Utgå från optimallösningen i uppgift a. Man konstruerar en ny sorts kaka som ger 5 i vinst, och får koefficient 1 i alla bivillkor. Skulle man vinna på att baka denna kaksort? (1p)

Uppgift 2

Betrakta problemet i uppgift 1. Efterfrågan är lite osäker, och de kakor som inte säljs kommer efteråt att ätas upp av personalen (så de anses inte ha något värde). Man vill därför använda en konkav funktion för vinsten, vilket gör att den förväntade vinsten minskar om man gör många kakor. Dessutom bestämmer man sig för att inte tillverka kaksort 1.

Man bestämmer sig för att skala om problemet, genom att låta x_j ange antal 100 kakor. Effekten blir att högerleden divideras med 100.

Man vill maximera följande målfunktion $f(x) = 4x_2 + 6x_3 - x_2^2 - 2x_3^2$,
under bivillkoren $x_2 + 2x_3 \leq 2$, $x_2 \leq 1.8$, $x_2 + x_3 \leq 1.5$ samt $x_2 \geq 0$ och $x_3 \geq 0$.

a) Lös problemet med Zoutendijks metod. Starta i (0,0). Gör gärna om till min-problem genom att multiplicera målfunktionen med -1. (3p)

b) Använd KKT-villkoren för att kontrollera varje extrempunkt i det tillåtna området avseende optimalitet. (3p)

c) Applicera Lagrangerelaxation genom att relaxera det första och tredje bivillkoret. Lös subproblemet för $u = (0, 0)$ och $u = (1, 1)$. (Observera att subproblemet är separabelt.) Använd de två lösningarna för att avgöra/gissa om de optimala värdena för u_1 och u_2 är noll, mellan noll och ett, lika med ett, eller större än ett. Ange bästa funna övre och undre gräns på det optimala målfunktionsvärdet. (3p)

Uppgift 3

Kak&Bak får en stor beställning på två sorters kakor, och funderar på hur man ska få dit kakorna. Man har två bilar som kan köra. De olika lastkapacitet, och kostar olika mycket (i bensin mm). Frågan är hur många gånger man ska köra varje bil.

Låt x_j ange hur många gånger man kör med bil j. Man vill minimera kostnaden för det hela, under bivillkoret att alla kakor kommer fram. Dessutom har man övre gränser för hur många gånger man kan köra varje bil. Man formulerar följande linjära heltalsproblem.

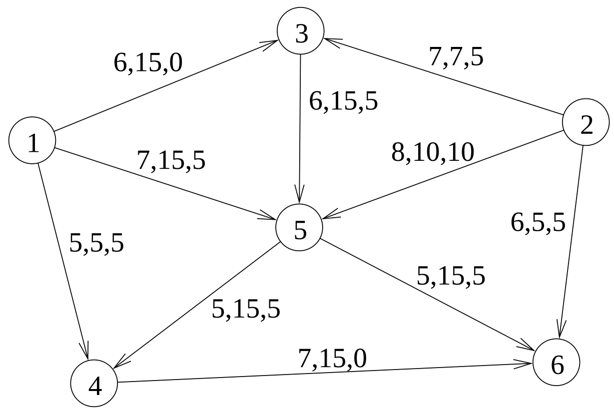
$$\begin{array}{lll} \min & f(x) = & 5x_1 + 3x_2 \\ \text{då} & & 4x_1 + 3x_2 \geq 11 \\ & & 0 \leq x_1 \leq 4 \\ & & 0 \leq x_2 \leq 3 \end{array}$$

Lös problemet med Land-Doig-Dakins metod. Ange optimallösning. LP-problem får lösas grafiskt. (3p)

Uppgift 4

Kak&Bak lyckas få ett avtal med affärskedjan Bröd&Mjöd för leverans av kakor till deras affärer. Kak&Baks kakor är hembakta, och dessa hem ligger i noderna 1 och 2 i följande nätverk. Affärerna ligger i noderna 4, 5 och 6. Mer specifikt finns det 10 kartonger kakor i nod 1 och 20 i nod 2, och det efterfrågas 10 i var och en av noderna 4, 5 och 6. Kakorna transporteras av en firma som tar betalt per kartong. På bågarna i nätverket står kostnaden per kartong samt hur många som maximalt kan transporteras den vägen. Hur ska man skicka kakorna?

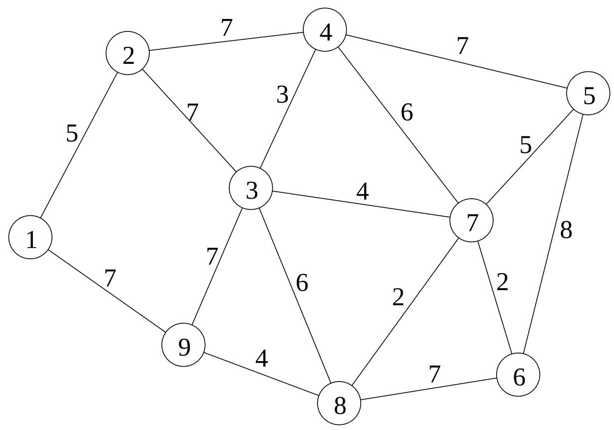
a) Det hela blir ett minkostnadsflödesproblem. På bågarna står till sist flödet i optimallösningen. Visa att lösningen är optimal. (2p)



b) Utgå från lösningen i uppgift a. Med hjälp av drönare kan man skicka två kartonger från nod 2 till nod 4 till kostnaden 15 per kartong. Ändras optimallösningen? Om så är fallet, beräkna en ny optimallösning. (2p)

Uppgift 5

a) Kak&Bak har börjat med hemleveranser. Med början och slut i nod 1 ska Kak&Baks lilla firmabil köra runt och leverera kakor till varje nod i grafen nedan. På bågarna står tiden det tar att köra bågen, och man vill göra rundturen så snabb som möjligt. Hur ska man köra?

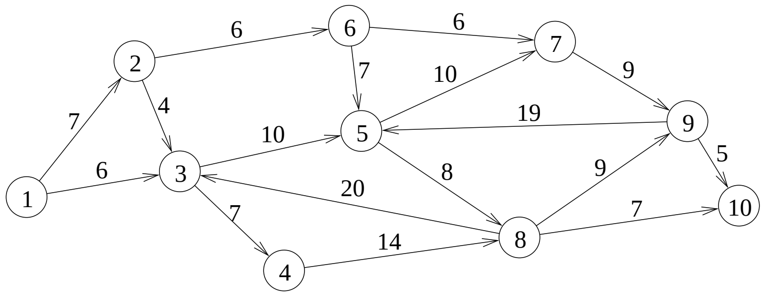


Vilket känt optimeringsproblem är det att finns den bästa rundturen? Finn en bra lösning med en känd heuristik. Finn även en undre gräns för det optimala målfunktionsvärdet genom att lösa en relaxation av problemet. Ange hur långt ifrån optimum den erhålla lösningen i värsta fall är. (3p)

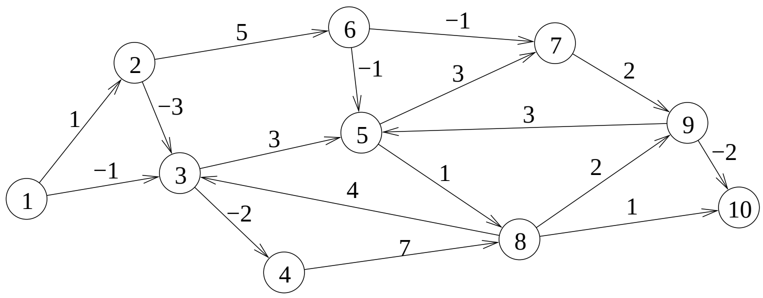
b) Man behöver inte leverera några kakor till nod 4 och 6, men man får köra via dem om det skulle löna sig. Visa hur man kan förprocessa problemet så att det blir ett normalt lösbart problem av typen i uppgift a. (1p)

Uppgift 6

a) Kak&Bak har fått en långväga beställning. Man ska därför köra från nod 1 i nedanstående graf till nod 10. På bågarna står den miljöpåverkan man bedömer att det skulle ge om man kör den vägen, och man vill finna den väg som minimerar total miljöpåverkan. (Man åker samma väg tillbaka.) Finn bästa väg från nod 1 till nod 10 med de bågkostnader som anges i nätverket nedan. (2p)



b) Kak&Baks firmabil har reklam målad på sig, och man anser att köra en sträcka kan ge en viss positiv reklameffekt (beroende på hur många som kan tänkas se reklamen). För att få med denna positiva effekt, minskar man alla bågkostnader med relevant mängd (beroende på hur man viktar ihop miljöeffekter med reklameffekter). Man får nu nedanstående bågkostnader. Finn bästa väg från nod 1 till nod 10 med lämplig metod. (2p)

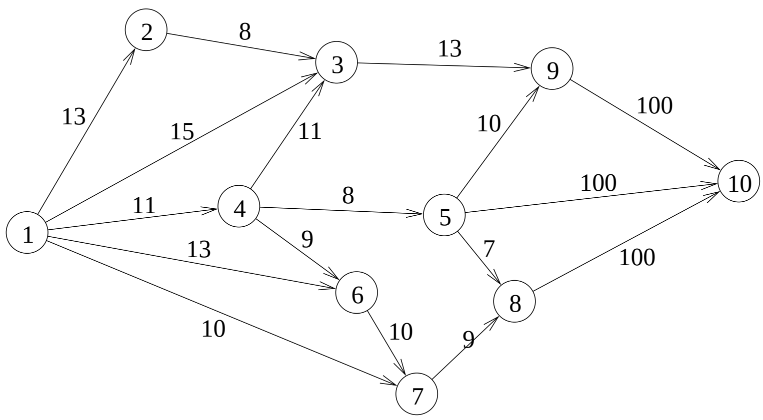


c) Utgå från lösningen i uppgift a. Hur mycket får båge (7,9) kosta om den ska ingå i billigaste vägen? Motivera med nodpriser. Ledning: Det optimala basträdet ändras inte. (1p)

Uppgift 7

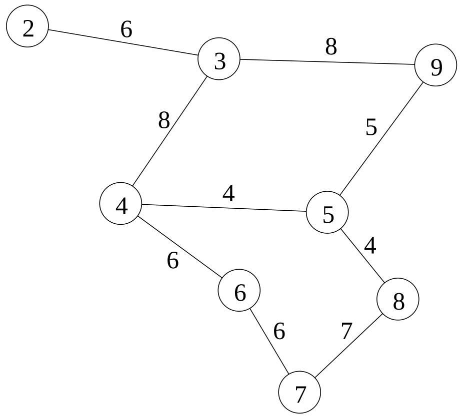
a) En av julmarknaderna som Kak&Bak ska till är MatMässan i Storköping. Där har man väldigt många försäljare och massor besökare. Räddningsverket hade förra året anmärkningar på utrymmeskapaciteten. Om det skulle börja brinna, ska givetvis alla besökande kunna sätta sig i säkerhet genom att följa i förväg skyltade utrymingsvägar. Om man ställer in för många stånd, kommer det att bli för trångt vid en sådan situation. Därför krävs det att arrangörerna för mässan kan verifiera att ett visst antal besökare kan ta sig fram till utgångarna, för att få tillstånd till att ta in så många.

Man konstruerar ett nätverk för möjliga vägar ut, och uppskattar hur många personer som maximalt kan ta sig fram på varje båge. I nedanstående nätverk har man infört en superkälla, nod 1, med bågar till de noder där man tror att folk är vid början av utrymningen, med kapacitet lika med antalet personer där, samt en supersänka, nod 10, med bågar från varje utgång. Därefter vill man ta reda på maxflöde från nod 1 till nod 10, samt var flaskhalsen (minsnittet) är. Kapaciteterna står för 100-tal personer.



Lös problemet med standardmetod. Visa varje steg i metoden tydligt. Ange minsnitt. (3p)

b) Räddningsverkat ifrågasätter bågkapaciteterna i modellen. Därför måste en av arrangörerna för mässan tillsammans med en representant för Räddningsverket gå igenom alla bågarna och motivera den kapacitet man räknat med. Man vill därför finna en rundtur som passerar alla bågarna, och den ska vara så kort som möjligt, eftersom representanten från Räddningsverkat har bråttom. (Man hoppar över nod 1 och nod 10, samt alla bågar som leder till och från dem, eftersom dessa bågar är fiktiva, och inte finns i verkligheten. Bågarna kan nu anses vara oriktade.) Följande nätverk är det aktuella, med avstånd på bågarna.



Vilket optimeringsproblem blir detta? Finn en optimallösning till problemet. Beskriv stegen i metoden noggrant. Ange rundtur och totalt avstånd. Vilka bågar ska genomgås mer än en gång? (3p)

Uppgift 8

Det visar sig att vissa julmarknader går samtidigt. Kak&Bak vill vara med på fem julmarknader som alla går första advent. Som tur är kan man skrapa ihop fem personer (inklusive släktingar) som kan ta hand om var sitt stånd på fem olika platser. Olika personer är olika bra på olika uppgifter, vissa är bättre säljare än andra, men man förväntar sig också att marknadsdeltagarna på de olika platserna har lite olika egenskaper (storstad, småstad, ingen stad alls). För att finna bästa tilldelningen av personer till marknader kan man sätta upp en matris med kostnader (dvs. hur mycket mindre kakor man kan tänkas sälja) om person i tar hand om marknad j, och sedan finna tilldelningen som minimerar totalkostnaden. (Rader motsvarar personer och kolumner marknader.)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 6 & 8 & 7 & 8 & 7 \\ 8 & 8 & 8 & 9 & 9 \\ 3 & 5 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & 1 & 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Lös problemet med ungerska metoden. Ange optimal lösning samt målfunktionsvärde. Ange även dual optimallösning och kontrollera starka dualsatsen. (3p)