Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP88/TEN 1
OPTIMERING FÖR INGENJÖRER

Datum:	29 maj 2019
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	9
Antal sidor:	7
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Linolf ska sälja kakor på en marknad. Förra gången sålde han dem styckvis, men inser att det troligen är en bättre affär att sälja dem i små påsar. Han har två sorters kakor, mörka och ljusa, och har funderat ut tre olika kombinationspåsar: påse 1: en mörk och fyra ljusa, påse 2: två mörka och två ljusa, påse 3: två mörka. Han har bara 12 mörka och 10 ljusa kakor. Målet är att tjäna så mycket pengar som möjligt, och han utgår från att allt kommer att säljas. Han har beräknat vinsten per påse till 3 kr för påse 1, 7 kr för påse 2 och 5 kr för påse 3.

Han formulerar följande linjära optimeringsproblem, där x_j står för hur många påsar av sort j han ska göra. (Om optimallösningen inte skulle bli heltal, kommer han i praktiken att avrunda neråt.)

$$
\begin{array}{llrcrcrcrl}
\max & z = & 3x_1 & + & 7x_2 & + & 5x_3 & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & 2x_2 & + & 2x_3 & \leq & 12 & (1) \\
& & 4x_1 & + & 2x_2 & & & \leq & 10 & (2) \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

a) Lös detta LP-problem med simplexmetoden. Ange optimal primallösning och duallösning samt målfunktionsvärde. Vilka bivillkor blir aktiva (dvs. blir det några kakor över)? (3p)

b) Utgå från optimallösningen i uppgift a. Om han skulle baka några kakor till av en sort, vilken sort skulle han tjäna mest på? (1p)

c) Utgå från optimallösningen i uppgift a. Han funderar på en ny påse, med en mörk och tre ljusa kakor. Vad skulle vinsten behöva vara för den påsen för att den skulle kunna förbättra lösningen? (1p)

d) Formulera LP-dualen till LP-problemet. Visa att den duala lösningen i uppgift a är tillåten samt att starka dualsatsen är uppfylld. (3p)

Uppgift 2

Linella har prövat ett kakrecept. Kakorna blev inte särskilt goda, så hon funderar på att ändra mängden socker och salt. Hon sätter upp ett optimeringsproblem där x_1 står för mängden socker och x_2 mängden salt (båda är relativa gentemot ursprungliga receptet, så värdet 1 motsvarar mängden i ursprungsreceptet). Efter djupa teoretiska studier kommer hon fram till att den bästa smaken skulle fås av att minimera följande målfunktion: $f(x) = x_1^2 + 2x_2^2 - 3x_1 - 5x_2$.

Som bivillkor har hon $0 \leq x_1 \leq 1$ och $0 \leq x_2 \leq 2$ (mängden socker får inte öka och mängden salt får inte bli inte mer än dubbelt så mycket). Dessutom anser hon att bivillkoret $2x_1 + 4x_2 \leq 6$ krävs för att konsistensen ska bli bra.

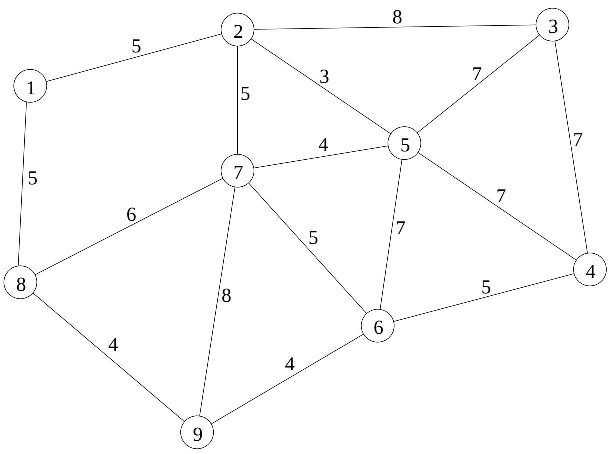
a) Använd KKT-villkoren för att kontrollera varje extrempunkt i det tillåtna området avseende optimalitet. (3p)

b) Lös problemet med Zoutendijks metod. Starta i (0,0). (Det är inte tillåtet att använda information från lösningen i uppgift a.) (3p)

c) Applicera Lagrangerelaxation genom att relaxera det enda bivillkoret som innehållar båda variablerna. Lös subproblemet för $u = 0$ och $u = 1$. (Observera att subproblemet är separabelt.) Använd de två lösningarna för att avgöra/gissa om det optimala värdet för u är noll, mellan noll och ett, lika med ett, eller större än ett. Ange bästa funna övre och undre gräns på det optimala målfunktionsvärdet. (Det är inte tillåtet att använda information från lösningen i uppgift a eller b.) (3p)

Uppgift 3

Studenterna i på universitetet i staden Mellanköping, MeU, har haft stora festligheter på flera platser i staden. Man har bett studenten Mellolf att städa efteråt. Han konstaterar att det ligger mycket skräp längs gatorna i centrum, och inser att han måste gå längs varje gata och plocka upp skräpet. Gatorna visas i nedanstående graf, med avstånd på bågarna. Han lånar en kärra att lägga skräpet i vid återvinningscentralen i nod 1 i grafen, så han vill starta och sluta sin rundtur där. Han vill givetvis slutföra sin uppgift så snabbt som möjligt, dvs. vill minimera den totala sträcka han behöver tillryggalägga.



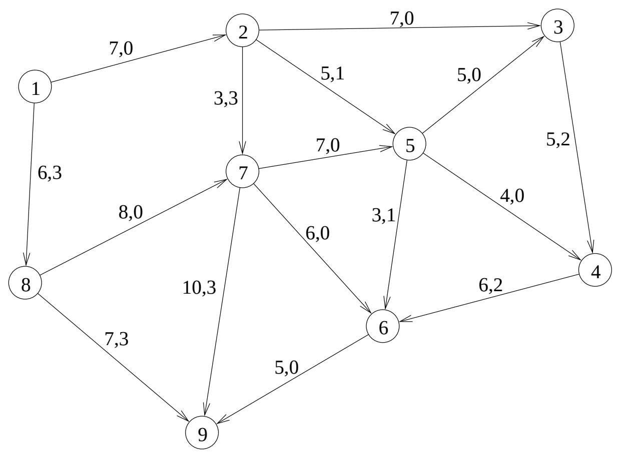
Vilket optimeringsproblem blir detta? Finn en optimallösning till problemet. Beskriv stegen i metoden noggrant. Ange rundtur och totalt avstånd. Vilka gator kommer att passeras mer än en gång? (3p)

Uppgift 4

Under festligheterna som beskrives i uppgift 3 har en mängd tomflaskor dykt upp. Ordentliga studenter har dock placerat dem i backar på vissa platser. Närmare bestämt finns det 3 backar i nod 1 i nedanstående nätverk, 4 backar i nod 2 och 2 backar i nod 3. Studenten Mellina får i uppgift att förflytta dessa backar. 6 backar ska till Studentpuben i nod 9 och 3 ska lämnas in till livsmedelsaffären i nod 6.

Mellina har bara sin cykel till hjälp, och kan bara förflytta en back i taget på den. Utan back på den går det lätt och snabbt att cykla till valfri plats, men med back är det besvärligt. Hon räknar därför med linjära kostnader på transporterna med backar (och kostnad noll då hon cyklar utan back). På bågarna i nätverket står kostnaden per back. Enkelriktningar måste åtlydas. Hur ska hon transportera backarna?

a) Det hela blir ett minkostnadsflödesproblem. På bågarna står till sist flödet i optimallösningen. Visa att lösningen är optimal. (2p)

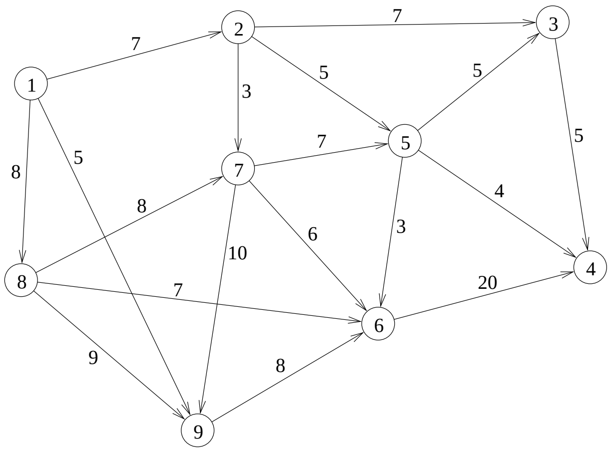


b) Utgå från lösningen i uppgift a. Mellina kan snedda genom en park från nod 6 till nod 9 till kostnaden 2 (per back). Ändras optimallösningen? Om så är fallet, beräkna en ny optimallösning. (2p)

Uppgift 5

Man ska ha en stor parad genom staden, och då måste Storgatan, och alla korsningar längs den, stängas av. Myndigheten för civilt försvar och allmän beredskap, MCFAB, har dock åsikter om detta, eftersom det är viktigt hur många som kan förflytta sig från centralstationen i nod 1 till sjukhuset i nod 4, om en större katastrof skulle inträffa.

I följande graf anges samtliga relevanta vägar och på dem en uppskattning av hur många fordon som maximalt kan färdas den vägen (per timme). Vid paraden stängs korsningarna vid noderna 5 och 7 av, dvs. inget flöde får passera dessa noder. Därefter vill man ta reda på maxflöde från nod 1 till nod 4, samt var minsnittet är, medan paraden pågår.



Lös problemet med standardmetod. Visa varje steg i metoden tydligt. Ange minsnitt. (3p)

Uppgift 6

Ett större antal studenter ska färdas från Nedsala till Mellanköping för att delta i festligheterna. Man kan hyra två sorters fordon, stora dyra bussar och/eller mindre billigare skåpbilar. Låt x_1 ange hur många bussar man hyr, och x_2 hur många skåpbilar. Man vill minimera kostnaden för det hela, under bivillkoret att alla studenter kommer fram, vilket kan ske genom att lösa följande linjära heltalsproblem.

$$\begin{array}{lll} \min & z = & 50x_1 + 12x_2 \\ \text{då} & & 40x_1 + 8x_2 \geq 100 \\ & & x_1, x_2 \geq 0, \text{heltal} \end{array}$$

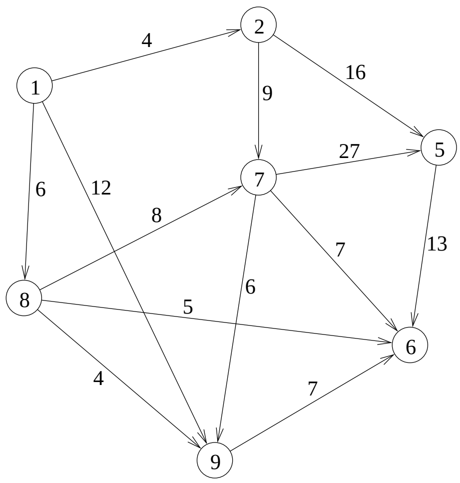
En Mellis (student från Mellanköping) påstår att den optimala lösningen är $x_1 = 2$ och $x_2 = 3$. Bevisa eller motbevisa detta. Använd Land-Doig-Dakins metod. LP-problem får lösas grafiskt. Ledning: En titt på målfunktionen visar att det optimala målfunktionsvärdet är ett jämnt heltal. (Man skulle kunna dividera alla målfunktionskoefficienterna med 2 och fortfarande ha heltal.) (3p)

Uppgift 7

Inför den stora festen i Mellanköping, ska Mellvin sätta upp reklamlappar i samtliga korsningar (noder) i staden, se grafen i uppgift 3. Mellvin använder cykel, och börjar och slutar rundturen i nod 1. Han vill göra rundturen så kort som möjligt. Hur ska han köra? Vilket känt optimeringsproblem är det att finns den bästa rundturen? Finn en bra lösning med en känd heuristik. Finn även en undre gräns för det optimala målfunktionsvärdet genom att lösa en relaxation av problemet. Ange hur långt ifrån optimum den erhålla lösningen i värsta fall är. (3p)

Uppgift 8

Ingolf har glömt en viktig sak till paraden, och måste snabbt cykla från nod 1 hem till nod 6 för att hämta den. Kompisen Ingolina, i nod 5, har också en likadan, som han skulle kunna låna. Paraden redan kommit igång, och på bågarna i nedanstående graf anges de tider som gäller vid just det tillfället. Finn bästa (snabbaste) väg från nod 1 till nod 6 och från nod 1 till nod 5, och avgör om Ingolf ska åka hem (nod 6) eller till Ingolina (nod 5) för att hämta saken. (Vi struntar i återfärden.) (3p)



Uppgift 9

Fem studenter ska göra fem olika "uppgifter" på ett lastbilsflak under den stora paraden. Man finner det dock lite svårt att göra "rollbesättningen", eftersom flera vill göra samma sak. För att finns den bästa tilldelningen av uppgifter till studenter, sätter man upp ett tillordningsproblem. Varje student får uppskatta en "kostnad" för att göra varje uppgift, och så finner man den tilldelning som har minimal totalkostnad. Kostnadsmatrisen ger nedan (rader motsvarar studenter och kolumner uppgifter.)

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 5 & 7 & 2 \\ 0 & 8 & 7 & 8 & 7 \\ 0 & 8 & 8 & 9 & 5 \\ 0 & 5 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & 9 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

a) Lös problemet med ungerska metoden. Ange optimal lösning samt målfunktionsvärde. Ange även dual optimallösning och kontrollera starka dualsatsen. (3p)

b) Någon påpekar att det inte är vettigt att sätta kostnad noll på första uppgiften, så alla ökar sin kostnad för den uppgiften med 3. Kommer detta att förändra den primala optimallösningen? Kommer detta att förändra den duala optimallösningen? (Lös inte om.) (1p)