Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP88/TEN 1
OPTIMERING FÖR INGENJÖRER

Datum:	23 oktober 2019
Tid:	14.00-19.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	9
Antal sidor:	7
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Mutrik ska sälja skruvar i påsar, och har kommit på att det troligen vore smart att sälja påsar med blandade storlekar. Det finns tre olika storlekar, och han har konstruerat följande blandningar:
1. 10 stora, 10 mellan och 20 små. Vinst: 6.
2. 20 stora och 20 mellan. Vinst: 5.
3. 40 små. Vinst: 4.
4. 20 mellan och 20 små. Vinst: 3.

Han har 100 stora, 120 mellan och 160 små skruvar.

Mutrik formulerar följande linjära optimeringsproblem, där x_j står för hur många påsar av sort j han ska göra. (Alla bivillkorskoefficienter har dividerats med 10.) (I denna uppgift struntar vi i heltalskrav.)

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcrl}
\max & z = & 6x_1 & + & 5x_2 & + & 4x_3 & + & 3x_4 & & & \\
\text{då} & & x_1 & + & 2x_2 & & & & & \leq & 10 & \quad (1) \\
& & x_1 & + & 2x_2 & & & + & 2x_4 & \leq & 12 & \quad (2) \\
& & 2x_1 & & & + & 4x_3 & + & 2x_4 & \leq & 16 & \quad (3) \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

a) Lös detta LP-problem med simplexmetoden. Ange optimal primallösning och duallösning samt målfunktionsvärde. Vilka bivillkor blir aktiva (dvs. blir det några skruvar över)? (3p)

b) Utgå från optimallösningen i uppgift a. Om Mutrik skulle köpa några skruvar till av en storlek, vilken storlek skulle han tjäna mest på? (1p)

c) Utgå från optimallösningen i uppgift a. Han funderar på en ny påse, med 10 stora, 10 mellan och 10 små. Vad skulle vinsten behöva vara för den påsen för att den skulle kunna förbättra lösningen? Ändras slutsatsen om han skulle vara generös och öka antalet mellanstora i nya påsen till 15? (1p)

d) Formulera det duala bivillkoret som motsvarar den nya variabeln i uppgift c. Visa att resultatet verifierar svaret i uppgift c. (1p)

Uppgift 2

Firma ByggBert ska gjuta grunden till ett nytt hus, och funderar på hur mycket tillsatser man ska använda, dels tensider för att göra betongen frostbeständig och dels plastfibrer för att undvika explosion vid brand. Låt x_1 stå för mängden tensider och x_2 mängden plastfibrer. Man har efter mycket forskning kommit fram till att andelen hålrum i betongen (vilket ger sämre kvalitet) ges av följande funktion: $f(x) = 4x_1^2 + 2x_2^2 - 12x_1 - 8x_2$. Man vill därför finna en blandning som minimerar denna funktion. Som bivillkor har man $x_1 \leq 1$ samt $x_1 + 2x_2 \leq 4$, $x_1 \geq 0$ och $x_2 \geq 0$.

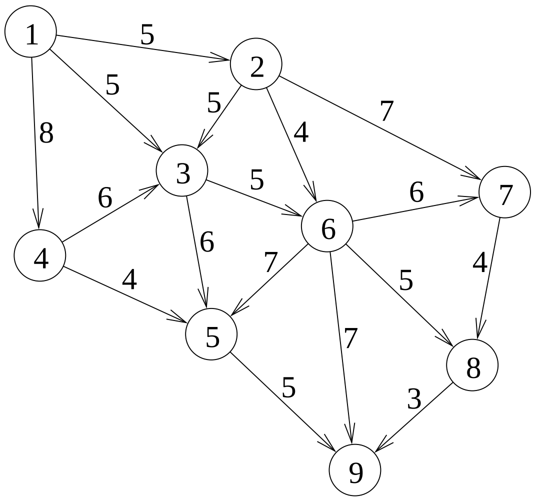
a) Använd KKT-villkoren för att kontrollera varje extrempunkt i det tillåtna området (förutom origo) avseende optimalitet. (3p)

b) Lös problemet med Zoutendijks metod. Starta i (0,0). (3p)

c) Applicera Lagrangerelaxation genom att relaxera bivillkoret $x_1 + 2x_2 \leq 4$. Lös subproblemet för $u = 0$ och för $u = 1$. (Observera att subproblemet är separabelt.) Använd de två lösningarna för att avgöra/gissa om det optimala värdet för u är noll, mellan noll och ett, lika med ett, eller större än ett. Ange bästa funna övre och undre gränsen på det optimala målfunktionsvärdet. (3p)

Uppgift 3

Minolf och Malin ska cykla från Mellanköping till Söderö. De funderar på vilken väg de ska välja, och konstruerar följande nätverk, där nod 1 är startpunkten (Mellanköping), och nod 9 är Söderö. Bågarna är märkta med uppskattad restid (lite omskalat). Man vill finna en väg med minimal restid.

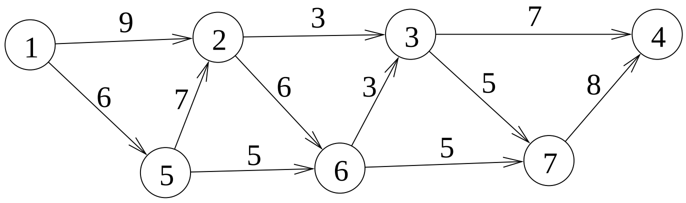


a) Vilket optimeringsproblem blir detta? Finn en optimallösning till problemet. Beskriv stegen i metoden noggrant. Ange väg och total restid. (2p)

b) De ändrar sig och vill åka till Österö (nod 8) istället. Ange snabbaste väg dit från Mellanköping (utan att lösa om problemet). (1p)

Uppgift 4

Snackademiska Hus AB har byggt ett nytt Studenthus åt MeU (Mellanköpings universitet) och flödet av cyklar förbi platsen har ändrats. Vid vissa tider blir det fullt av cyklister, och nästan stopp, vilket irriterar studenter som riskerar att komma försent. Man bestämmer sig för att utreda frågan. Man konstruerar ett nätverk som visar det möjliga vägarna cyklister kan ta, och gör en bedömning av hur många cyklister per minut som högst kan passera genom varje länk i nätverket. Därefter vill man finna det maximala flöde som kan passera från nod 1 till nod 4. Man är egentligen mest intresserad av minsnittet, dvs. vilka vägar som begränsar maxflödet. Kapaciteten på dessa kan kanske byggas ut och därmed öka genomströmningen.



a) Lös problemet med standardmetod. Visa varje steg i metoden tydligt. Ange minsnitt. (3p)

Uppgift 5

Snackademiska Hus ska installera luftreningsapparater i sitt nybyggda Studenthus. Det finns två olika sorter, med olika kapacitet och kostnad. Låt x_j ange hur många apparater av sort j man installerar. Man vill maximera total kapacitet under bivillkoret att kostnaden inte överstiger den budgeterade, vilket leder till följande linjära heltalsproblem.

$$\begin{array}{lll} \max & z = & 2x_1 + 4x_2 \\ \text{då} & & 6x_1 + 8x_2 \leq 20 \\ & & x_1, x_2 \geq 0, \text{heltal} \end{array}$$

a) Lös problemet med Land-Doig-Dakins metod. LP-problem får lösas grafiskt. Ledning: Dividera målfunktionskoefficienterna med 2. (3p)

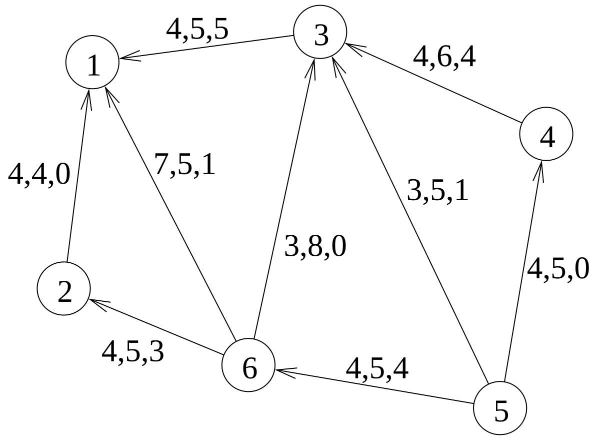
b) Hur mycket skulle man behöva öka budgeten för att få en bättre lösning? Finn svaret genom att studera problemet grafiskt. (1p)

Uppgift 6

Mellanköping har infört ett system med elcyklar som man kan hyra. Cyklarna förvaras vid ett antal laddningsstationer, där man kan hämta och lämna dem. Det visar sig dock att cyklarna till slut hamnar på fel plats, eftersom det är större efterfrågan på resor från vissa platser. Man måste därför flytta tillbaka cyklarna då och då. Detta görs med specialbyggda lastbilar, och man vill göra det på billigaste sätt.

Vi betraktar en situation i nedanstående nätverk, där man nu har 5 cyklar i nod

4, 5 cyklar i nod 5 och inga i nod 1 och 2. Man vill nu ha 6 cyklar i nod 1 och 3 i nod 2. På bågarna står först kostnaden att transportera en cykel, sedan en övre gräns för hur många som kan transporteras den vägen, och till sist antal transporterade cyklar som räknats fram av konsultbyrån MerOpt. Man beaktar inte hur bilarna kör mellan transporterna, utan bara hur de kör när de är lastade med cyklar, och räknar med linjära kostnader.



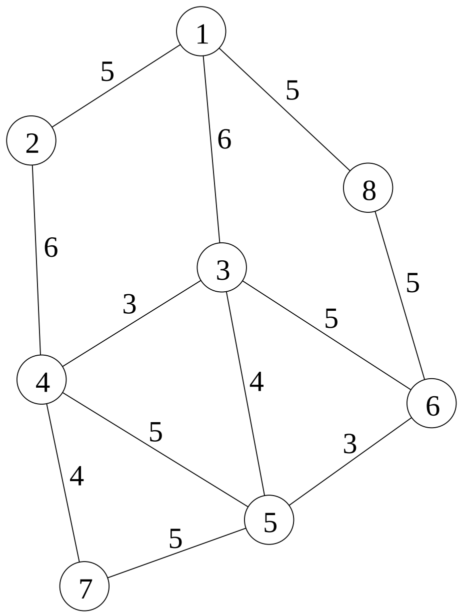
a) Det hela blir ett obalanserat minkostnadsflödesproblem, dvs. total källstyrka är större än total sänkstyrka. Alla cyklar i nod 4 och 5 kommer inte att flyttas. Modifiera nätverket så att det blir balanserat, genom att ta hand om överskottet på ett optimalt sätt. (1p)

b) Visa att den föreslagna lösningen är optimal. (2p)

c) Utgå från lösningen i uppgift b. Om man tillåter lastbilarna med cyklar att använda bussfilerna, minskas vissa transportkostnader, nämligen c_{54} ändras från 4 till 2, och c_{21} ändras från 4 till 2. Ändras optimallösningen? Om så är fallet, beräkna en ny optimallösning. (2p)

Uppgift 7

Följande graf föreställer cykelvägarna genom skogen mellan universitetet i Mellanköping, MeU, och bostadsområdet Malla där många studenter bor. Det är höst och löv har fallit ner på vägarna, och gjort dem hala för cyklister. Man ska nu sopa bort löven med en sopmaskin. Maskinen står i nod 5 och ska köra en rundtur så att den åter hamnar i nod 5 när den har sopat alla vägar. På varje båge i grafen står tiden det tar att sopa den. Man vill att sopningen ska vara färdig så tidigt som möjligt. (Maskinen kör lika fort när den sopar som när den inte gör det.)

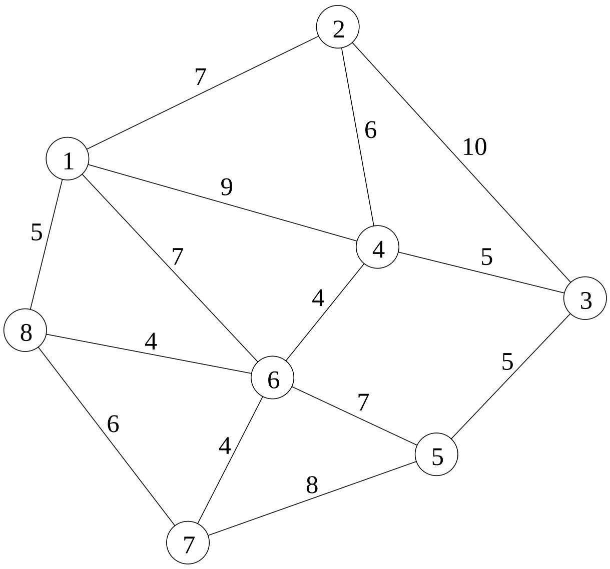


Vilket optimeringsproblem blir detta? Finn en optimallösning till problemet. Beskriv stegen i metoden noggrant. Ange rundtur och totalt avstånd. Vilka vägar kommer att passeras mer än en gång? (3p)

Uppgift 8

Varje sopmaskin (se föregående uppgift) har lagt de uppsamlade löven i en hög där maskinens rundtur slutade. Nu ska man samla ihop lövhögarna, och har avdelat en lastbil till detta. Följande graf visar möjliga vägar mellan lövhögarna (som ligger i nod 1 - 7) och återvinningsstationen (i nod 8) dit alla löv ska lämnas. Lastbilen är stor nog att få med alla löv på en gång, så man vill finna den snabbaste rundturen som besöker alla noder. På bågarna står körtid.

Vilket känt optimeringsproblem är det att finns den bästa rundturen? Finn en bra lösning med en känd heuristik. Finn även en undre gräns för det optimala målfunktionsvärdet genom att lösa en relaxation av problemet. Ange hur långt ifrån optimum den erhålla lösningen i värsta fall är. (3p)



Uppgift 9

Familjen Muhalm har en stor trädgård som består av fem delar, separerade av murar och häckar. Det har fallit massor höstlöv från familjens stora ekar, och de måste räfsas bort. Man har bestämt att familjens fem medlemmar ska räfsa var sin del av trädgården. Alla vill givetvis ta den minsta delen, så man bestämmer sig för att göra en optimal tillordning. Först görs en bedömning av hur lång tid det skulle ta för varje person att räfsa varje del. Dessa tider anges i nedanstående matris, där rader står för delar av trädgården och kolumner står för personer. Därefter vill man helt enkelt finna den tilldelning av personer till områden som minimerar total räfstid (dvs. summan av tiderna).

$$C = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 5 & 8 & 9 \\ 6 & 8 & 7 & 9 & 9 \\ 7 & 7 & 7 & 9 & 8 \\ 5 & 5 & 4 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

a) Lös problemet med ungerska metoden. Ange optimal lösning samt målfunktionsvärde. Ange även dual optimallösning och kontrollera starka dualsatsen. (3p)

b) Lill-Linas räfsa är lite trasig, och hon kan inte använda någon annan (för de är för stora). Därför kommer alla tider för Lill-Lina (kolumn 5) att öka med 3. Kommer detta att förändra den primala optimallösningen? Kommer detta att förändra den duala optimallösningen? (Lös inte om.) (1p)