Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP88/TEN 1
OPTIMERING FÖR INGENJÖRER

Datum:	7 januari 2020
Tid:	14.00-19.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar i boken får förekomma.
Antal uppgifter:	9
Antal sidor:	7
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.

Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.

Uppgift 1

Firma Gel AB har uppfunnit nytt godis. Man använder samma gjutform som för gelehallon, men använder olika färger och olika smakessenser. Man har inte riktigt bestämt namn på dem ännu (man vill gärna ha något som för tankarna till frukt, även om ingen frukt ingår), och benämner dem för tillfället med den färg de har. Eftersom man är lite osäker på marknaden, väljer man att sälja påsar med blandade färger. Man har tänkt sig följande blandpåsar:
1. 10 blå, 0 svarta och 20 vita. Vinst: 4.
2. 10 blå, 15 svarta och 0 vita. Vinst: 5.
3. 10 blå, 15 svarta och 20 vita. Vinst: 2.
4. 10 blå, 10 svarta och 0 vita. Vinst: 3.
Man har för tillfället 120 000 blå, 90 000 svarta och 80 000 vita.

Gel formulerar följande linjära optimeringsproblem, där x_j står för hur många 1000 påsar av sort j de ska sätta ihop.

$$
\begin{array}{llrcrcrcrcrr}
\max & z = & 4x_1 & + & 5x_2 & + & 2x_3 & + & 3x_4 & & & \\
\text{då} & & 10x_1 & + & 10x_2 & + & 10x_3 & + & 10x_4 & \leq & 120 & (1) \\
 & & & & 15x_2 & + & 15x_3 & + & 10x_4 & \leq & 90 & (2) \\
 & & 20x_1 & & & + & 20x_3 & & & \leq & 80 & (3) \\
 & & x_1, & & x_2, & & x_3, & & x_4 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

a) Lös detta LP-problem med simplexmetoden. Ange optimal primallösning och duallösning samt målfunktionsvärde. Vilka bivillkor blir aktiva (dvs. vilka färger blir över)? (3p)

b) Gel AB bestämmer att man ska skänka bort 5 st av valfri färg till välgörande ändamål. Vilken färg ska man välja, och varför? (1p)

c) Utgå från optimallösningen i uppgift a. Man funderar på en ny påse, med 20 svarta och 20 vita. Vad skulle vinsten behöva vara för den påsen för att den skulle kunna förbättra lösningen? (1p)

d) Formulera det duala bivillkoret som motsvarar den nya variabeln i uppgift c. Visa att resultatet verifierar svaret i uppgift c. (1p)

Uppgift 2

Gel AB ska designa en ny sorts segt godis, Salta Buggar (tänkt att appellera till studenter som programmerar), och funderar på hur mycket tillsatser man ska använda för att konsistensen ska bli den bästa. Man fokuserar på mängden gelatin (x_1) och mängden glycerol (x_2). Man har efter mycket forskning kommit fram till att den bästa konsistensen ges av att minimera följande funktion: $f(x) = 2x_1^2 + 4x_2^2 - 4x_1 - 5x_2$. Som bivillkor har man $x_1 + x_2 \leq 1$, $x_1 \geq 0$ och $x_2 \geq 0$.

a) Använd KKT-villkoren för att kontrollera varje extrempunkt i det tillåtna området avseende optimalitet. (3p)

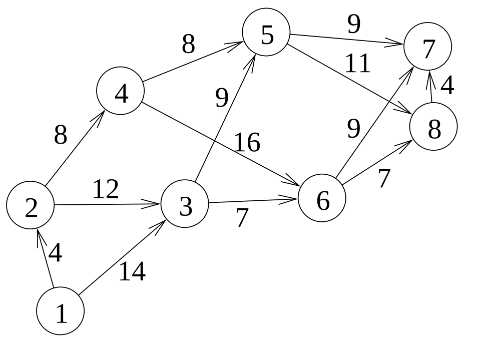
b) Lös problemet med Zoutendijks metod. Starta i (0,0). (3p)

c) Applicera Lagrangerelaxation genom att relaxera bivillkoret $x_1 + x_2 \leq 1$. Lös subproblemet för $u = 0$, $u = 1$ och $u = 2$. (Observera att subproblemet är separabelt.) Använd lösningarna för att avgöra/gissa var det optimala värdet för u ligger. Ange bästa funna övre och undre gränsen på det optimala målfunktionsvärdet. (3p)

d) Betrakta Lagrangerelaxationen i uppgift c. Lös ut x som funktion av u och räkna ut hur stor u ska vara för att det relaxerade bivillkoret ska bli aktivt, och vilken x-lösning det ger. (1p)

Uppgift 3

Gel AB har fått en engångsbeställning av 10 ton skumtomtar till en affär strax utanför Karesuando. Man ska skicka sin största lastbil med lasten, och funderar på vilken väg som är bäst. Den ska köra från nod 1 till nod 7 i följande nätverk, där bågarna är märkta med uppskattad restid i timmar. Man vill finna en väg med minimal total restid.



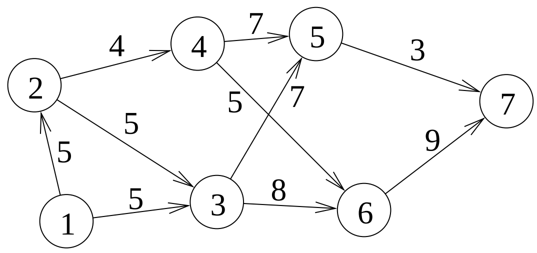
a) Vilket optimeringsproblem blir detta? Finn en optimallösning till problemet. Beskriv stegen i metoden. Ange väg och total restid. (2p)

b) Föraren behöver ta raster under färden, och vill därför veta när hon anländer till de olika platserna/noderna. Ange detta (i restid från starttidpunkten). (1p)

c) Man skulle kunna leverera tomtarna till Kiruna (nod 8) istället, och låta affärsinnehavaren själv ta hand om den sista transporten. Självklart måste man då sänka priset på transporten. Antag att sänkningen som gör att affärsinnehavaren accepterar detta motsvarar 2 tidsenheters förlust för Gel. Lönar sig detta för Gel? (1p)

Uppgift 4

Gel AB har många transporter till staden Lullköping (där det bor många studenter), och efterfrågan ökar hela tiden. Man börjar därför fundera på hur mycket man kan få fram dit överhuvudtaget. Möjliga transportvägar ges av nedanstående graf, där nod 1 är Gels fabrik och nod 7 Lullköping, och varje båge märkts med maximal mängd som kan transporteras den vägen. Man vill helt enkelt finns den maximala mängd godis som kan transporteras från nod 1 till nod 7.



Lös problemet med standardmetod. Visa varje steg i metoden tydligt. Ange minsnitt. (3p)

Uppgift 5

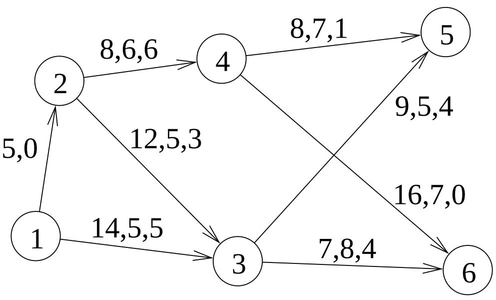
Gel AB funderar på att köpa fler gjutmaskiner för godis. Det finns två olika sorter, med olika kapacitet och kostnad. Låt x_j ange hur många maskiner av sort j man köper. Man vill maximera total kapacitet under bivillkoret att kostnaden inte överstiger den budgeterade, vilket leder till följande linjära heltalsproblem.

$$\begin{array}{lll} \max & z = & 5x_1 + 7x_2 \\ \text{då} & & 6x_1 + 8x_2 \leq 12 \\ & & x_1, x_2 \geq 0, \text{heltal} \end{array}$$

Lös problemet med Land-Doig-Dakins metod. LP-problem får lösas grafiskt. (3p)

Uppgift 6

Gel AB köper upp konkurrentfirman Gått&Grått, och tar över deras fabriker. Man ställs då inför problemet att dagligen köra produkterna från fabrikerna till grossisterna. Följande nätverk ger möjliga transportvägar. Varje dag produceras 5 ton i nod 1 och 9 ton i nod 2, och 5 ton ska levereras till nod 4, 5 ton till nod 5 och 4 ton till nod 6. På bågarna står först kostnaden att transportera ett ton, sedan en övre gräns för hur många ton som kan transporteras den vägen, och till sist ett transportmönster som tidigare räknats fram av konsultbyrån MerOpt.

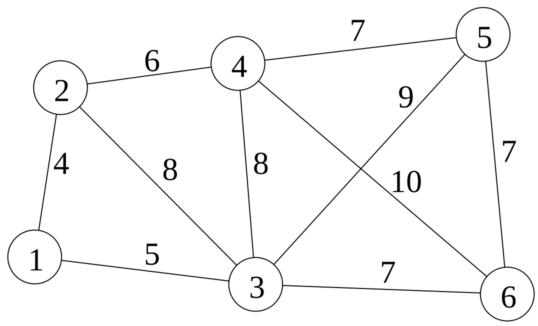


a) Man har haft vägarbete på båge (4,6) och därför har kostnaden varit hög. Nu blir vägarbetet färdigt, och kostnaden sjunker från 16 till 5. Starta med MerOpts lösning och beräkna en ny optimallösning. (3p)

b) Man har möjlighet att producera upp till 8 ton i nod 1, och vill veta hur mycket man skulle tjäna på att öka produktionen där, och hur man då skulle transportera godiset. Efterfrågan ändras inte, så produktionen i nod 2 måste minskas lika mycket som den ökas i nod 1. Hur kan nätverket modifieras så att detta optimeras? Gör detta och finn bästa lösning. Utgå från lösningen i uppgift a. (2p)

Uppgift 7

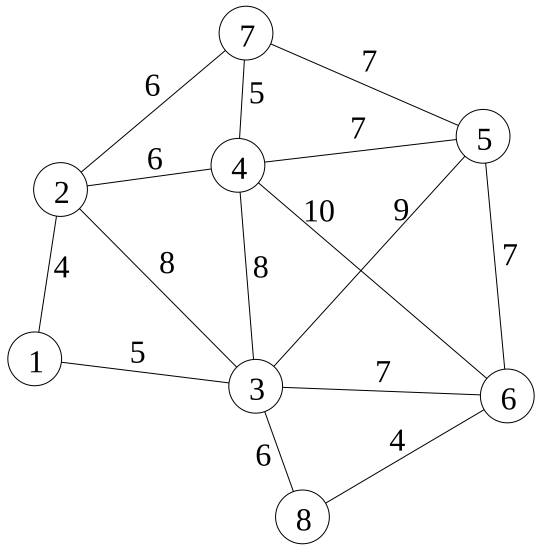
Följande graf föreställer korridorerna i en av Gels fabriker. De måste rengöras varje kväll, och det görs av en maskin. Maskinen står i nod 1 och ska köra en rundtur så att den åter hamnar i nod 1 när den har rengjort alla korridorer. På varje båge i grafen står tiden det tar att rengöra den. Man vill att rengöringen ska vara färdig så fort som möjligt. (Maskinen kör lika fort när den rengör som när den inte gör det.)



Vilket optimeringsproblem blir detta? Finn en optimallösning till problemet. Beskriv stegen i metoden noggrant. Ange rundtur och total tid. (Ledning: Summan av alla bågkoefficienter är 71.) Vilka vägar kommer att passeras mer än en gång? (3p)

Uppgift 8

Teknologen Laban sommarjobbar som nattvakt, och får i uppdrag att kontrollera en av Gels fabriker. Det finns nycklar utplacerade på flera ställen i fabriken och hans uppgift är att vrida om varje nyckel i en apparat han bär med sig. Laban kommer under sin vandring i den ödsliga fabriken att tänka på att detta påminner om orientering. Han ska alltså gå en rundtur som besöker ett antal punkter (en gång). Varför inte välja den kortaste rundturen? Följande graf visar möjliga vägar mellan nycklarna, och på bågarna står gångtid.



Vilket känt optimeringsproblem är det att finns den bästa rundturen? Finn en bra lösning med en känd heuristik. Finn även en undre gräns för det optimala målfunktionsvärdet genom att lösa en relaxation av problemet. Ange hur långt ifrån optimum den erhålla lösningen i värsta fall är. (Laban har glömt bort att nycklarna måste tas i en viss ordning, så hans lösning kan inte användas, men det struntar vi i.) (3p)

Uppgift 9

Gel AB har nyanställt fem maskinoperatörer som ska sköta fem olika maskiner i fabriken. De har olika utbildning och erfarenhet, så de kan hantera de olika maskinerna med olika framgång, och frågan är vem som ska ta hand om vilken maskin. En ny person betyder alltid ett produktionsbortfall jämfört med en erfaren person. Man har därför gjort en matris över produktionsbortfallet för varje person att sköta varje maskin, där rader står för maskiner och kolumner står för personer. Man vill helt enkelt finna den tilldelning av personer till maskiner som minimerar total produktionsbortfall.

$$C = \begin{pmatrix} 15 & 18 & 15 & 18 & 19 \\ 6 & 8 & 7 & 9 & 9 \\ 27 & 27 & 27 & 29 & 28 \\ 5 & 5 & 4 & 6 & 7 \\ 15 & 16 & 15 & 18 & 19 \end{pmatrix}$$

Lös problemet med ungerska metoden. Ange optimal lösning samt målfunktionsvärde. Ange även dual optimallösning och kontrollera starka dualsatsen. (3p)