Matematiska institutionen
Optimeringslära

TENTAMEN

TAOP88/TEN 1
OPTIMERING FÖR INGENJÖRER

Datum:	2 juni 2020
Tid:	8.00-13.00
Hjälpmedel:	Miniräknare
	Kurslitteratur: Kaj Holmberg: *Optimering*
	Anteckningar och annat skriftligt material.
Antal uppgifter:	8
Antal sidor:	7
	Uppgifterna är *inte* ordnade efter svårighetsgrad.
	Totalt antal poäng är 40. För godkänt krävs 16 poäng.
Examinator:	Kaj Holmberg
Jourhavande lärare:	Kaj Holmberg, tel 013-282867, epost kaj.holmberg@liu.se

Resultat meddelas per e-post

Tentamensinstruktioner

När Du löser uppgifterna

Redovisa dina beräkningar och din lösningsmetodik noga.
Motivera alla påståenden du gör.
Använd de standardmetoder som ingår i kursen.
Skriv endast på ena sidan av lösningsbladen. Använd inte rödpenna.
Behandla endast en huvuduppgift på varje blad.

Vid skrivningens slut

Sortera dina lösningsblad i uppgiftsordning.
Markera på omslaget vilka uppgifter du behandlat.
Kontrollräkna antalet inlämnade blad och fyll i antalet på omslaget.
Fotografera eller skanna in tentan och skicka in som en pdf-fil.
(Se separata instruktioner.)

Samtliga numeriska värden i denna tenta är påhittade. Sammanhangen är dock till stor del inspirerade av nuvarande verklighet.

Uppgift 1

En lastbilstillverkare ska ställa om sin produktion, och istället tillverka skyddsvisir, andningsmasker och skyddsförkläden. Frågan är hur mycket av varje sort man ska tillverka varje dag. Produkterna delar på vissa gemensamma resurser, så man sätter upp följande linjära optimeringsproblem, där x_1 står för antal skyddsvisir, x_2 står för antal andningsmasker och x_3 står för antal skyddsförkläden. Bivillkor (1) står för lokalbehov, bivillkor (2) står för tillgång av plast och bivillkor (3) står för tillgång av tyg. Målfunktionen står för vinst, och skall maximeras. Man tänker sig att det finns ett obegränsat behov av alla produkter.

$$
\begin{array}{llrcrcrcrl}
\max & z = & 4x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & & & \\
\text{då} & & 4x_1 & + & 2x_2 & + & 6x_3 & \leq & 1000 & (1) \\
& & 2x_1 & + & x_2 & + & 4x_3 & \leq & 400 & (2) \\
& & & & 2x_2 & + & 2x_3 & \leq & 600 & (3) \\
& & x_1, & & x_2, & & x_3 & \geq & 0 &
\end{array}
$$

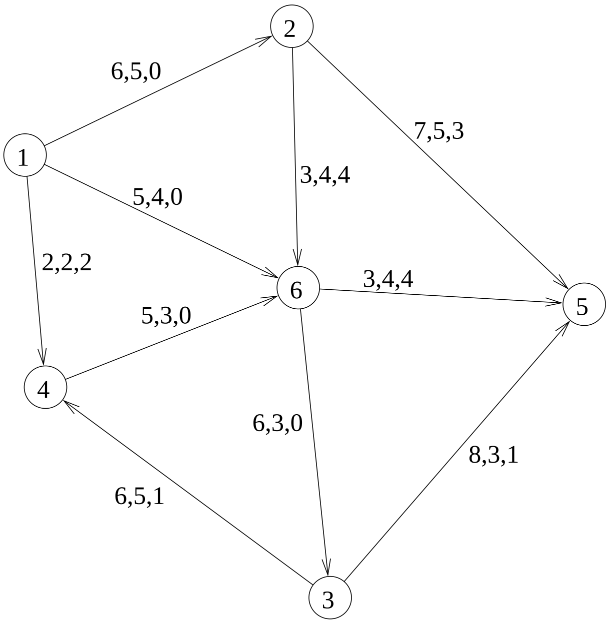
a) Lös detta LP-problem med simplexmetoden. Ange optimal primallösning och duallösning samt målfunktionsvärde. Är optimallösningen unik? Vilka bivillkor blir aktiva (dvs. vilka resurser är begränsande)? Ange skuggpriserna och vad de betyder. (3p)

b) En ingenjör designar en ny typ av skyddskläder, som har koefficient 3 i bivillkor 1, 3 i bivillkor 2 och 1 i bivillkor 3. Utgå från optimallösningen i uppgift a. Vad skulle vinsten behöva vara för att den produkten skulle kunna förbättra lösningen? (1p)

c) Formulera det duala bivillkoret som motsvarar den nya variabeln i uppgift b. Visa att resultatet verifierar svaret i uppgift b. (1p)

Uppgift 2

Det har under en större pandemi uppstått brist på viss skyddsutrustning, och man ska på EU-nivå bestämma hur olika länder kan hjälpa varandra genom skicka utrustning mellan länder. I följande nätverk motsvarar noderna olika länder och bågarna möjliga transportvägar. Nätverket är glesare än vanligt på grund av transportrestriktioner mellan länderna. I den situation man står inför kommer det att finnas överskott av utrustningen i vissa noder, nämligen 3 ton i nod 1, 7 ton i nod 2 och 5 ton i nod 3. Underskottet, dvs. behovet kommer att uppgå till 3 ton i nod 4 och 8 ton i nod 5. Man vill minimera kostnaderna för transporterna, och kostnaden per ton är angiven på varje båge. På bågarna anges också hur mycket som maximalt kan skickas den vägen, samt en föreslagen lösning, framtagen av en underavdelning till Europeiska kommissionen.



a) Det hela blir ett obalanserat minkostnadsflödesproblem, dvs. total källstyrka är större än total sänkstyrka. All utrustning i nod 1, 2 och 3 kommer inte att flyttas. Modifiera nätverket så att det blir balanserat, så att överskottet fördelas på ett optimalt sätt. Visa att den föreslagna lösningen är optimal. (2p)

b) Vissa länder kommer att öppna upp sina gränser något, vilket ger förändringar i nätverket, eftersom billigare transportsätt tillkommer. I detta fall tillkommer en båge (3,6) med $c_{36} = 3$ och $u_{36} = 5$. Utgå från lösningen i uppgift a och beräkna en ny optimallösning. Hur mycket minskas totalkostnaden av ändringarna? (2p)

c) Ett möjligt framtidsscenario är att det uppstår mycket stor brist i nod 5. Man kan också tänka sig att öka produktionen mycket i nod 1, dvs. öka tillgången mycket. Frågan är då hur mycket man maximalt kan skicka från nod 1 till nod 5. Man tittar på situationen utan den nya bågen i uppgift b. Lös problemet med standardmetod. Starta med flöde noll. Visa varje steg i metoden tydligt. Ange minsnitt och förklara vad det betyder. (3p)

Uppgift 3

En forskargrupp arbetar med att ta fram ett läkemedel som ska lindra förloppet hos patienter med en mycket smittsam virussjukdom. Läkemedlet ska vara en kombination av tre läkemedel (interferon beta-1b, lopinavir och ribavirin), men frågan är i vilka proportioner. Låt x_1 vara proportionen av interferon beta-1b, x_2 proportionen av lopinavir och x_3 proportionen av ribavirin. Man har efter viss forskning kommit fram till hypotesen att den bästa effekten ges av att minimera följande funktion: $f(x) = 8x_1^2 + 4x_2^2 + 8x_3^2 - 8x_1 - 10x_2 - 12x_3$. Som bivillkor har man $x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ och $x_3 \geq 0$.

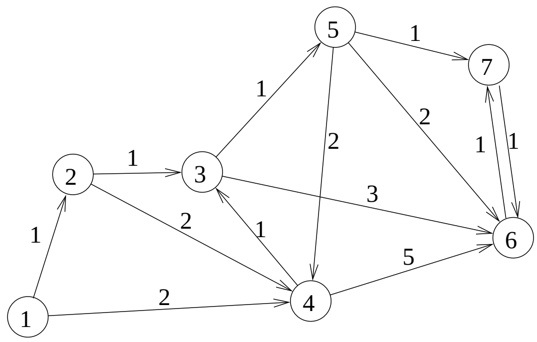
a) Man finner det mycket osannolikt att optimum skulle ligga i en extrempunkt till det tillåtna området. Varför? Ledning: Vilka ämnen ingår i blandningen i extrempunkterna? Använd KKT-villkoren för att verifiera att extrempunkterna inte är optimala. (3p)

b) Applicera Lagrangerelaxation genom att relaxera bivillkoret $x_1 + x_2 + x_3 \leq 1$. Lös subproblemet för $u = 0$, $u = 5$ och $u = 6$. (Observera att subproblemet är separabelt.) Använd lösningarna för att avgöra/gissa var det optimala värdet för u ligger. Ange bästa funna övre och undre gränsen på det optimala målfunktionsvärdet. (3p)

c) Av medicintekniska skäl vill man sätta $x_3 = 3x_1$. Gör denna substitution i problemet och lös det resterande problemet med Zoutendijks metod. Starta i (0,1). (3p)

Uppgift 4

Man behöver flytta en intensivvårdspatient från ett fullbelagt sjukhus, nod 1, till ett som inte är fullt, nod 6 eller nod 7, i nedanstående graf. På varje båge står tiden det tar att använda den (i timmar), och man vill minimera transporttiden.



a) Vilket optimeringsproblem blir detta? Finn en optimallösning till problemet. Beskriv stegen i metoden. Ska man åka till nod 6 eller nod 7? Ange väg och total restid. (2p)

b) Ange planerad tid för ankomst till varje nod längs vägen till den bästa noden (i restid från starttidpunkten). Man behöver nämligen iordningställa den nya platsen, och vill veta om den planerade ankomsttiden kommer att hållas, eller om det blir förseningar. Därför ber man föraren skicka ett sms vid ankomsten till varje nod längs vägen, för att jämföra med planerad ankomsttid. (1p)

Uppgift 5

Ett sjukhus ska göra om vissa sjukhussalar till intensivvårdssalar. Det finns två typer av salar som kan göras om, och de ger olika många intensivvårdsplatser och kräver olika antal av vissa apparater. Minst en och högst tre av varje salstyp ska göras om. Man vill maximera antalet nyskapade intensivvårdsplatser, under bivillkoren att tillgänglig mängd apparater räcker till. Detta leder till följande linjära heltalsproblem, där x_j anger hur många salar av typ j man gör om, och bivillkoren står för olika typer av apparater.

$$\begin{array}{llll} \max & z = & 5x_1 + 8x_2 & \\ \text{då} & & 5x_1 + 4x_2 \leq 20 & (1) \\ & & 2x_1 + 6x_2 \leq 15 & (2) \\ & & x_1 + 2x_2 \leq 6 & (3) \\ & & x_1, x_2 \in \{1, 2, 3\} & \end{array}$$

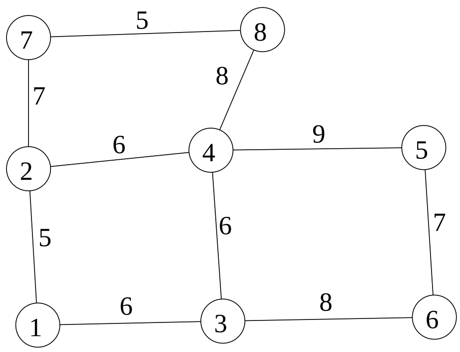
a) Lös problemet med Land-Doig-Dakins metod. LP-problem får lösas grafiskt. Ledning: Gå ner i $\geq$-grenen först. (3p)

b) Balas metod går ut på att stryka möjliga värden för variablerna då bivillkor gör dem omöjliga. Om en variabel bara har två möjliga värden, 0 och 1, så blir variabeln fixerad om ett av värdena stryks. Man kan dock använda samma teknik för variabler som har fler möjliga värden, såsom i problemet ovan, där variablerna har tre möjliga värden.

Starta med att kontrollera att (1,2) är en tillåten lösning, beräkna målfunktionsvärdet och sätt upp ett bivillkor som kräver en bättre lösning. Förgrena sedan: Antingen $x_1 \leq 1$ eller $x_1 \geq 2$. Undersök sedan båda grenarna med Balas metod, dvs. ta cykliskt bort otillåtna värden. Fortsätt tills optimalitet är verifierad. (3p)

Uppgift 6

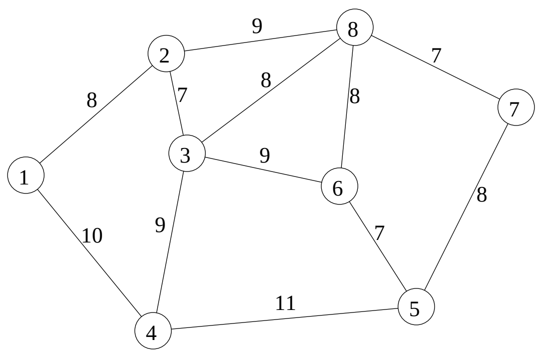
Följande graf föreställer korridorerna i ett sjukhus. De ska saneras från eventuell smitta av en maskin varje kväll. Maskinen står i nod 1 och ska köra en rundtur så att den åter hamnar i nod 1 när den har sanerat alla korridorer. På varje båge i grafen står tiden det tar att sanera den. Man vill bestämma hur maskinen ska köra för att saneringen ska vara färdig så fort som möjligt. Maskinen kör dubbelt så fort när den inte sanerar som när den gör det.



Vilket optimeringsproblem blir detta? Finn en optimallösning till problemet. Beskriv stegen i metoden noggrant. Ange rundtur, total tid samt hur många gånger varje korsning passeras. Vilka korridorer kommer att passeras mer än en gång? (3p)

Uppgift 7

En affärskedja har fått en leverans av toalettpapper, och ska så snabbt som möjligt leverera ut dessa till de olika butikerna (som har sålt slut på den produkten) med en lastbil. Man vill därför finna en rundtur som tar så lite tid som möjligt i nedanstående graf, där varje båge är märkt med restid,



a) Vilket känt optimeringsproblem är det att finns den bästa rundturen? Finn en bra lösning med en känd heuristik. Finn även en undre gräns för det optimala målfunktionsvärdet genom att lösa en relaxation av problemet. Ange hur långt ifrån optimum den erhålla lösningen i värsta fall är. (2p)

b) Formulera ett linjärt bivillkor som skär bort optimallösningen till relaxationen i uppgift a, men inte skär bort någon tillåten rundtur. (1p)

Uppgift 8

Ett företag i turistnäringen har gått i konkurs på grund av uteblivet resande, men som tur är ska samtliga fem anställda få arbete på den närbelägna stormarknaden. Personerna har dock olika kompetens och stormarknaden erbjuder fem olika arbetsplatser (köttdisken, lagret, kassan, grönsaksavdelningen samt städning). Varje person kommer att kräva en viss upplärningstid innan arbetet kan påbörjas, beroende på kompetens och arbetsplats. Man har därför gjort en matris över nödvändig upplärningstid för varje person och varje arbetsplats, där rader står för personer och kolumner står för arbetsplatser. Man vill finna den tilldelning av personer till arbetsplatser som minimerar total upplärningstid.

$$C = \begin{pmatrix} 8 & 9 & 11 & 12 & 7 \\ 6 & 8 & 7 & 9 & 9 \\ 7 & 7 & 7 & 9 & 8 \\ 5 & 5 & 4 & 7 & 7 \\ 5 & 6 & 5 & 8 & 6 \end{pmatrix}$$

a) Lös problemet med ungerska metoden. Ange optimal lösning samt målfunktionsvärde. Ange även dual optimallösning och kontrollera starka dualsatsen. (3p)

b) Vissa personer är mer flexibla än andra. Gör en jämförelse mellan person 1 och person 5, genom att se vilka arbetsplatser de skulle klara av, utan ökad totalkostnad, baserat på den slutgiltiga matrisen med reducerade kostnader. (1p)